수리 영역

출 | 제 | 경 | 향

9월 모의 평가는 6월 모의 평가에서 측정한 올해 수험생들의 실력을 분석하고 실제 올해 대수능의 방향과 난이도를 조정하는 기준의 역할이 크다.

2008학년도 대수능에서는 수리 영역의 난이도 조절의 실패에 대한 비판이 매우 많았다. 이러한 비판을 의식해서인지 올해 6월 모의 평가에서는 일단 근래의 어떠한 모의고사보다도 난이도가 높았다. 하지만 6월 모의 평가에서는 여러 단계를 거치는 계산 과정이나 2문제를 하나로 합친 문제가 많았고, 이러한 것들이 다시 논란이 되었다. 이러한 논란의 과정에서 올해 9월 모의 평가는 6월 모의 평가의 출제 경향이 2009학년도 대수능으로 이어질 것인가 아닌가의 시금석으로 많은 주목을 받아왔다.

이번 9월 모의 평가 시험지를 받았을 때 6월 모의 평가의 난이도가 비정상적이라고 생각하고 이번 대수능의 난이도가 6월 모의 평가에 비하여 낮아질 것이라고 예상한 수험생들은 많이 당황하였을 것이다. 결론적으로 6월 모의 평가에 비하여 이번 시험의 난이도는 낮아지지 않았다. 그러나 내용면에서 보면 6월 모의 평가와는 많은 차이를 보인다. 6월 모의 평가에 비하여 이번 시험은 매우 정제된, 상위권을 제외한 수험생들의 경우에는 문제 해결의 실마리를 찾기가 아주 어려운 문제들이 많았다. 반면, 문제 해결의 실마리를 찾기만 하면 계산 과정은 비교적 쉬웠기 때문에 상위권 학생들은 상대적으로 좋은 점수를 받을 수 있겠지만, 그 이외의 수험생들은 오히려 6월 모의 평가보다도 더욱 어렵게 여겨졌을 것이다. 이러한 이번 9월 모의 평가의 경향은 암기식 교육을 부정한 수능의 기본 개념에도 부합하는 것이라 여겨진다.

구체적인 문제 분석과 출제 단원들은 출제 문항 분석에서 확인하도록 하자.

학 | 습 | 대 | 책

9월 모의 평가가 문제 해결의 실마리를 파악하면 계산 과정이 비교적 쉬웠기 때문에 대수능의 원래 목적(암기식 교육의 지양)에 충실하였고, 올해의 대수능에서도 이러한 경향이 지속되리라는 예상을 할 수 있다. 하지만 결국 수학은 계산 과정에 익숙하지 않으면 언제나 실수할 가능성이 있기 때문에 6월 모의 평가가 같이 계산 과정이 복잡하더라도 당황하지 않도록 충분히 연습하여야 한다. 그리고 교과 과정의 기본적인 개념은 다시 한 번 반드시 확인하자.

또한, 앞으로 남은 기간 동안 많은 문제를 풀기보다는 틀린 문제에 대한 충분한 검토와 자기 반성이 필요하다. 결국 대수능에서 어려운 문제는 기존 문제집에서 나온 문제의 변형이 아니라 여러분들이 처음 보는 문제이기가 쉽다. 이러한 문제들이 요구하는 것은, 기본 개념에서 출발하여 문제에서 요구하는 것을 찾아내기 위하여 이용해야 할 것이 무엇인지를 찾아내는 연습이다.

따라서, 앞으로 남은 기간 동안 여러분들의 공부 방향은 6월 모의 평가에서 강조된 계산 능력의 향상과 9월 모의 평가에서 강조하는 기본 개념의 충분한 이해를 통한 문제 해결의 실마리를 찾는 능력을 향상하는 데 초점을 맞추어야 한다.

• 수리 '가' 형 •

정 | 답

1. ②	2. ①	3. ⑤	4. ⑤	5. ④
6. ④	7. ②	8. ⑤	9. ⑤	10. ③
11. ④	12. ④	13. ②	14. ②	15. ③
16. ③	17. ②	18. 13	19. 10	20. 32
21. 10	22. 110	23. 64	24. 12	25. 30

〔미분과 적분〕

26. ①	27. ③	28. ①	29. ③	30. 20

〔확률과 통계〕

26. ①	27. ①	28. ④	29. ③	30. 36

〔이산수학〕

26. ①	27. ③	28. ④	29. ①	30. 76

출 | 제 | 문 | 항 | 분 | 석 |

문항	난이도	출제 단원	유의점
1	하	지수와 로그	간단한 로그 계산
2	하	행렬	간단한 행렬 계산
3	하	함수의 극한	극한과 미정계수
4	하	방정식과 부등식	분수부등식의 계산
5	중	확률	조건부 확률
6	중	함수의 극한	연속성
7	중	벡터	벡터와 내적
8	상	이차곡선	도형과 이차곡선
9	중	공간도형과 좌표	구와 공간도형
10	중	미분	미분과 방정식
11	상	적분	정적분과 부등식
12	상	공간도형과 좌표	정사면체의 성질
13	중	통계	표본평균과 정규분포
14	중	수열	등비수열과 로그의 계산
15	중	지수·로그함수	로그함수의 그래프
16	상	행렬	행렬과 참·거짓
17	상	수열의 극한	도형과 무한급수
18	중	미분	미분과 최대·최소
19	중	로그	상용로그의 계산
20	중	이차곡선	쌍곡선과 직선
21	상	방정식과 부등식	실생활과 방정식
22	상	수열	여러 가지 수열
23	중	순열과 조합	경우의 수
24	중	수열의 극한	도형과 무한급수
25	상	공간도형과 좌표	정사영
26	중	삼각함수	2배각의 공식
27	중	미분	변곡점
28	중	적분	적분과 넓이
29	상	함수의 극한	극한과 참·거짓
30	상	미분	미분과 최대·최소
26	중	확률	조건부 확률
27	중	통계	확률분포
28	중	통계	기댓값
29	상	통계적 추정	표본평균의 분포와 추정
30	상	자료의 정리와 요약	최빈값, 중앙값, 평균
26	중	그래프	생성수형도
27	중	선택과 배열	중복조합
28	중	그래프	오일러회로, 해밀턴회로, 평면그래프
29	상	알고리즘	도형에서의 규칙성
30	상	의사결정과 최적화	최적화

풀 | 이 |

1. $2^{2\log_3 9} = 2^{\log_3 3^4} = 2^4 = 16$

2. $A(2A^{-1}+3E) = 2E+3A$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 15 & -12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 15 & -10 \end{pmatrix}$$

따라서, 모든 성분의 합은 22이다.

3. 수렴하는 함수의 극한에서 (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$이 되어야 한다.

$$\lim_{x\to -3}\{\sqrt{x^2-x-3}+ax\} = 3-3a = 0$$

$\therefore\ a=1$

이제 주어진 식의 극한값을 구하면

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2-x-3}+x}{x+3}$$

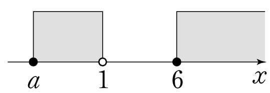
$$= \lim_{x\to -3}\frac{(x^2-x-3)-x^2}{(x+3)(\sqrt{x^2-x-3}-x)} = -\frac{1}{6}$$

$\therefore\ b = -\dfrac{1}{6}$

$\therefore\ a+b = 1-\dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

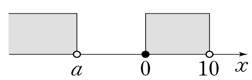
4. a가 음수이므로 두 부등식의 해집합을 수직선 위에 각각 나타내면

$\dfrac{(x-6)(x-a)}{x-1} \geqq 0$:



$a \leqq x < 1,\ 6 \leqq x$

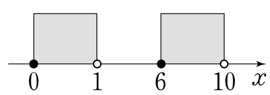
$\dfrac{x}{(x-a)(x-10)} \leqq 0$:



$x < a,\ 0 \leqq x < 10$

이 두 집합의 교집합을 수직선상에 나타내면

$0 \leqq x < 1,\ 6 \leqq x < 10$



그러므로 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 6, 7, 8, 9이다.

따라서, 정수 x의 개수는 5개이다.

5. 혈액형이 B형일 확률을 $\mathrm{P}(B)$

남학생일 확률은 $\mathrm{P}(M)$

Rh^+형일 확률은 $\mathrm{P}(R^+)$라 하면

$$\mathrm{P}(M\cap R^{+}|B)=\frac{\mathrm{P}(M\cap R^{+}\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$
$$=\frac{\frac{150}{1000}}{\frac{150+6+80+4}{1000}}$$
$$=\frac{150}{240}=\frac{5}{8}$$

6. 연속이 되려면 (좌극한값)=(우극한값)=(함숫값)이면 된다.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x-1)f(x+1)$

$=\lim\limits_{x\to-2-0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to-0} f(x)=1\cdot 1=1$

$\lim\limits_{x\to-1+0} f(x-1)f(x+1)$

$=\lim\limits_{x\to-2+0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to+0} f(x)=1\cdot(-1)=-1$

∴ 극한값이 존재하지 않으므로 불연속

ㄴ. $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x-1)f(x+1)$

$=\lim\limits_{x\to-2-0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to-0} f(x)=0\cdot 1=0$

$\lim\limits_{x\to-1+0} f(x-1)f(x+1)$

$=\lim\limits_{x\to-2+0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0\cdot 1=0$

$f(-2)\cdot f(0)=0\cdot(-1)=0$

∴ 연속

ㄷ. $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x-1)f(x+1)$

$=\lim\limits_{x\to-2-0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to-0} f(x)$

$=f(-2)\cdot 1=f(-2)$

$\lim\limits_{x\to-1+0} f(x-1)f(x+1)$

$=\lim\limits_{x\to-2+0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to+0} f(x)$

$=f(-2)\cdot 1=f(-2)$

$f(-2)\cdot f(0)=f(-2)$

∴ 연속

따라서, 연속이 되는 경우는 ㄴ, ㄷ이다.

7. $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}=|\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}||\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}|\cos\theta=\cos\theta$

$\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$가 이루는 각 θ의 범위를 구하여 보면 $60^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$이므로

$\cos\theta$의 최댓값은 $M=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

최솟값은 $m=\cos 180^\circ=-1$이므로

$M+m=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

8. $\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{AQ}}$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{OP}}=6$(일정)

즉 Q의 자취는 점 O, A를 초점으로 하고 장축의 길이가 6인 타원의 일부이다.

$\mathrm{Q}(x,\ y)$라 하면

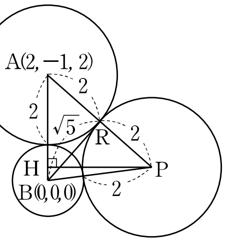
$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}=6$

$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ (단, $y\neq 0$)

$\therefore\ X\subset\left\{(x,\ y)\,\middle|\,\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\right\}$

9. 두 구의 중심 사이의 거리는 3이므로 두 구는 외접하고 있다.

P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구가 주어진 구에 외접하려면 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$는 (0, 0, 0), (2, −1, 2)를 지나는 직선으로부터 일정한 거리에 있어야 한다. P에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 P의 자취는 $\overline{\mathrm{PH}}$를 반지름으로 하는 원의 둘레가 된다.



$\triangle$ABP의 넓이로부터, $\overline{\mathrm{BR}}=\sqrt{5}$이므로

$\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{5}=\frac{1}{2}\times 3\times\overline{\mathrm{HP}},\ \overline{\mathrm{HP}}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$

∴ 둘레의 길이는 $2\pi\cdot\frac{4\sqrt{5}}{3}=\frac{8\sqrt{5}}{3}\pi$

10. ㄱ. $1<x<2$일 때

$g(x)=\int_{-1}^{1}(1-t)dt+\int_{1}^{x}(t-1)(-t+2)dt$

$g'(x)=-(x-1)(x-2)>0$이므로

$g(x)$는 $1<x<2$에서 증가한다. ∴ 참

ㄴ. $g'(1)$이 존재하면 된다. 즉, 좌미분계수와 우미분계수가 존재하고 같으면 된다.

$g'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$에서

우미분계수는

$$\lim_{h\to+0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to+0}\frac{\int_{1}^{1+h}(t-1)(2-t)dt}{h}=0$$

좌미분계수는

$$\lim_{h\to-0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to-0}\frac{\int_{1}^{1+h}(t-1)(-1)dt}{h}=0$$

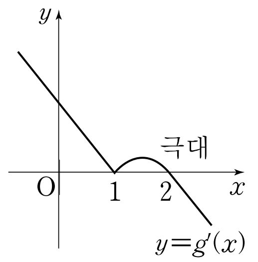
$\therefore\ g'(1)=0 \qquad \therefore$ 참

ㄷ. $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면

$\begin{cases} y=g(x) \\ y=k \end{cases}$가 서로 다른 세 점에서 만나면 된다.

따라서 $y=g(x)$는 극대·극소가 각각 1개 이상 존재해야 한다.

그런데 $g'(x)=\begin{cases} (x-1)(-1) & (x<1) \\ (x-1)(-x+2) & (x \geqq 1) \end{cases}$가 되어 $g(x)$의 극값은 오직 1개가 된다.



그러므로 $g(x)=k$는 서로 다른 세 실근을 가질 수 없다. $\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

11. $f(x)$는 (가)에 의해 (0, 0)을 지나고 (나)에 의해 $0<x<y<1$일 때

$f(x)>0,\ \dfrac{f(y)}{y}<\dfrac{f(x)}{x}$임을 알 수 있다.

A는 □OPQS의 넓이이고

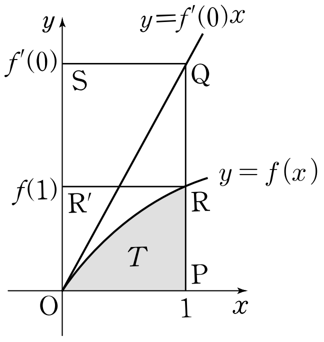
B는 □OPRR′의 넓이, C는 어두운 부분의 넓이 T의 넓이의 2배이다.

□OPQS>□OPRR′이므로 A>B

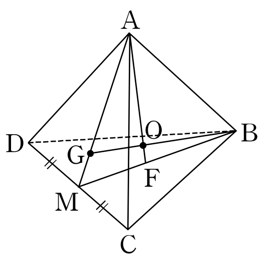
2△ORP<2어두운 부분의 넓이 T이므로 B<C

2△OPQ<2어두운 부분의 넓이 T이므로 A>C

따라서, A>C>B



12.



ㄱ. $\overline{\mathrm{CD}}$의 중점을 M이라 하면 점 G, F는 평면 ABM 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{AF}}$, $\overline{\mathrm{BG}}$는 교점을 갖고, 이 교점이 구의 중심 O이다. 따라서, $\overline{\mathrm{AF}}$, $\overline{\mathrm{BG}}$는 꼬인 위치가 아니다. $\therefore$ 거짓

ㄴ. 외접구의 반지름이 1이고 정사면체의 한 변의 길이를 a라 하면

$\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a,\ \overline{\mathrm{AO}} : \overline{\mathrm{OF}}=3 : 1$

$\therefore\ 1=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a \qquad a=\dfrac{4}{\sqrt{6}}$

따라서, △ABC의 넓이는

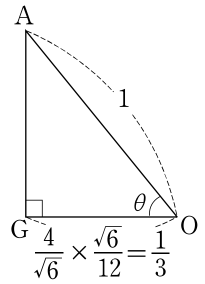
$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{4}{\sqrt{6}}\right)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{16}{6}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}<\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$

$\therefore$ 참

ㄷ. △AOG에서 O는 내·외접구의 중심이고 G는 내접구의 접점

$\angle\mathrm{AGO}=90^\circ$이고 $\overline{\mathrm{AO}}=3\overline{\mathrm{OG}}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{1}{3} \qquad \therefore$ 참



따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

13. $f(x)=f(100-x)$에서

$y=f(x)$의 그래프는

직선 $x=50$에 대칭인 그래프이다.

$\therefore\ m=50$

크기 25인 표본을 임의 추출할 때 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 $N\left(50,\ \left(\dfrac{10}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

$\mathrm{P}(44 \leqq \overline{X} \leqq 48)=\mathrm{P}\left(\dfrac{44-50}{2} \leqq Z \leqq \dfrac{48-50}{2}\right)$

$\therefore\ \mathrm{P}(-3 \leqq Z \leqq -1)=\dfrac{0.9974}{2}-\dfrac{0.6826}{2}$

$=0.1574$

14. n번 시행 후 빵의 가격을 P_n 무게를 W_n이라 하면 단위 무게 당 가격은 $\dfrac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{W}_n}$이다.

$\dfrac{\mathrm{P}_{n+1}}{\mathrm{W}_{n+1}}=\dfrac{\mathrm{P}_n}{0.9\mathrm{W}_n}=\dfrac{10}{9}\cdot\dfrac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{W}_n}$

$\therefore$ 한 번의 시행에서 단위 무게 당 가격은 $\frac{10}{9}$배가 되므로 n번 시행하면 $\left(\frac{10}{9}\right)^n$배가 된다.

$\left(\frac{10}{9}\right)^n \geqq \frac{3}{2}$, $n(1-2\log 3) \geqq \log 3 - \log 2$

$n \geqq \frac{0.1761}{1-0.9542} = \frac{0.1761}{0.0458} = 3.\mathrm{xxx}$

$\therefore\ n=4$

15. $f(x)=2^{x-2}+1$, $g(x)=\log_2(x-1)+2$이므로 $y=f(x)$의 역함수를 구해보면

$y=2^{x-2}+1$, $y-1=2^{x-2}$, $x-2=\log_2(y-1)$

$\therefore\ y=\log_2(x-1)+2=g(x)$

$\therefore\ f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수이다.

ㄱ. $f^{-1}(5)(g(5)+1)=\{g(5)^2\}+g(5)=20$
($\because\ g(5)=\log_2 4+2=4$) $\therefore$ 참

ㄴ. $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수이므로 $y=x$에 대해 대칭이다. $\therefore$ 참

ㄷ. $y=f(x)$는 $(2,\ 2)$를 지나므로 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점이 존재한다. $y=f(x)$는 증가함수이므로
$y=x$와 $y=f(x)$의 교점은 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점이 된다. $\therefore$ 거짓

16. $B=A-\frac{p+q}{2}E$, $k=\boxed{\frac{p-q}{2}}$라 하면

$B-kE=A-pE$이고 $B+kE=A-qE$이므로

$B-kE$와 $B+kE$는 모두 역행렬을 갖지 않는다.

따라서, $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면

$B-kE=\begin{pmatrix} a-k & c \\ b & d-k \end{pmatrix}$, $B+kE=\begin{pmatrix} a+k & b \\ c & d+k \end{pmatrix}$

에서 각각의 행렬식을 구하면

$(a-k)(d-k)-bc=0$이고 $(a+k)(d+k)-bc=0$

이다.

$\therefore ad-bc-(a+d)k+k^2=0$ …… ㉠

$ad-bc+(a+d)k+k^2=0$ …… ㉡

㉠−㉡ 하면

$-2(a+d)k=0$

$k\neq 0$이므로 $a+d=\boxed{0}$

㉠에 대입하면 $ad-bc=-k^2$

또, $B^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\frac{1}{-k^2}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}=\frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

($\because\ a+d=0$)

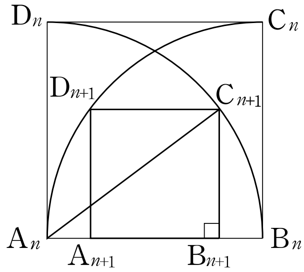
즉 $B^{-1}=\frac{1}{k^2}\boxed{B}$ …… ㉢

㉢ $\times k^2B$ 하면

$k^2E=B^2$

$\therefore A^2-(p+q)A+pqE=(A-pE)(A-qE)$
$=(B-kE)(B+kE)=B^2-k^2E$
$=O$

17.



$\overline{A_nB_n}=x_n$, $\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=x_{n+1}$이라면

$\overline{A_nA_{n+1}}=\frac{x_n-x_{n+1}}{2}$이므로

$\overline{A_nB_{n+1}}=\frac{x_n+x_{n+1}}{2}$

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=x_{n+1}$

$\overline{A_nC_{n+1}}=x_n$

$\therefore$ 삼각형 $A_nB_{n+1}C_{n+1}$에서 피타고라스정리에 의해

${x_n}^2=\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right)^2+{x_{n+1}}^2$

$5{x_{n+1}}^2+2x_nx_{n+1}-3{x_n}^2=0$

$\therefore\ (5x_{n+1}-3x_n)(x_{n+1}+x_n)=0$

$\therefore\ x_{n+1}=\frac{3}{5}x_n$

$\therefore\ S_{n+1}=\frac{9}{25}S_n,\quad S_1=\frac{9}{25}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{9}{16}$

[다른 풀이]

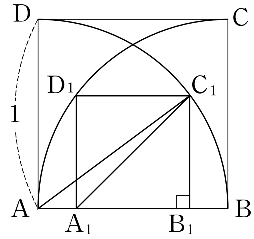
$\overline{B_1C_1}=x$하면,

$\overline{A_1C_1}=\sqrt{2}x$,

$\overline{AA_1}=\frac{1-x}{2}$

$\overline{AC_1}=1$($\because$ 반지름)

$\angle AA_1C_1=135°$



$\therefore$ 삼각형 AA_1C_1에서 제2코사인정리에 의해

$$1^2=\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^2+(\sqrt{2}\,x)^2$$
$$-2\times\frac{1-x}{2}\times\sqrt{2}\,x\times\cos 135°$$
$$1=\frac{(1-x)^2}{4}+2x^2+(1-x)x$$
$$5x^2+2x-3=0$$
$$(5x-3)(x+1)=0$$
$$\therefore\ x=\frac{3}{5}$$
$$\therefore\ S_1=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25},$$
$$\overline{BC}:\overline{B_1C_1}=\overline{B_1C_1}:\overline{B_2C_2}=\overline{B_2C_2}:\overline{B_3C_3}=\cdots\cdots$$
$$=1:\frac{3}{5}$$
$\therefore$ S_n은 $S_1=\frac{9}{25}$, 공비 $\frac{9}{25}$인 등비수열이므로

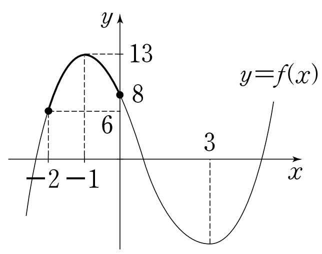
$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{9}{16}$$

18. $f(x)=x^3-3x^2-9x+8$

$$f'(x)=3x^2-6x-9$$
$$=3(x-3)(x+1)=0$$
따라서, $x=-1$에서 극대, $x=3$에서 극소가 된다.

구간 $[-2, 0]$에서 값을 조사해보면

$f(-2)=6$, $f(-1)=13$, $f(0)=8$



따라서, 최댓값은 13이다.

19. 주어진 관계식에서

$6.15=0.67\times\log(0.37E_1)+1.46$ ⋯⋯ ㉠

$5.48=0.67\times\log(0.37E_2)+1.46$ ⋯⋯ ㉡

㉠－㉡에서

$$0.67=0.67(\log 0.37E_1-\log 0.37E_2)$$
$$\therefore \log\frac{E_1}{E_2}=1 \qquad \therefore\ \frac{E_1}{E_2}=10$$

20. 점 $P(-6, 2)$에서의 접선 l은

$l: -6x-2y=32,\ 3x+y+16=0$

$\overleftrightarrow{OH}: x-3y=0$

$x^2-y^2=32$와 $x-3y=0$을 연립하여 풀면

$x=\pm 6,\ y=\pm 2 \quad \therefore Q(6, 2)$

$$\therefore\ \overline{OH}=\frac{16}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{16}{\sqrt{10}}$$
$$\overline{OQ}=\sqrt{36+4}=2\sqrt{10}$$
$$\therefore\ \overline{OH}\cdot\overline{OQ}=\frac{16}{\sqrt{10}}\times 2\sqrt{10}=32$$

21. 시간당 A, B공장에서 각각 a대, b대를 생산한다면

$6(a+b)=50$ ⋯⋯ ㉠

A공장에서 50대를 생산하는 데 걸리는 시간 x는

$$x=\frac{50}{a}$$
B공장에서 50대를 생산하는데 거리는 시간은

$$\frac{50}{b}$$
조건에서 $\frac{50}{a}+5=\frac{50}{b}$ ⋯⋯ ㉡

㉠과 ㉡에서 $\frac{10}{a}+1=\frac{10}{\frac{25}{3}-a}$, 정리하면

$$3a^2+35a-250=0$$
$$(a-5)(30+50)=0$$
$$\therefore\ a=5(\because\ a>0) \qquad \therefore\ x=\frac{50}{5}=10$$

22. $\sqrt{k}$를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하여 n이므로

$$n-\frac{1}{2}\leqq\sqrt{k}<n+\frac{1}{2}$$
$$n^2-n+\frac{1}{4}\leqq k<n^2+n+\frac{1}{4}$$
n과 k가 자연수이므로

$n^2-n+1\leqq k\leqq n^2+n$ ⋯⋯ ㉠

㉠을 만족하는 자연수 k의 개수는

$$a_n=(n^2+n)-(n^2-n+1)+1$$
$$=2n$$
$$\therefore\ \sum_{i=1}^{10}a_i=\sum_{i=1}^{10}2i=2\times\frac{10\times 11}{2}=110$$

23.
1열 : 할아버지, 할머니
2열 : 아버지, 어머니 ⋯⋯ ㉠

1열 : 아버지, 어머니
2열 : 할아버지, 할머니 ⋯⋯ ㉡

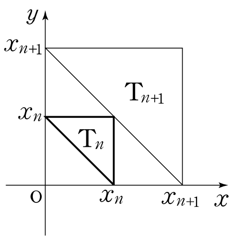
두 가지 경우가 있다.

㉠의 경우 : 할아버지와 할머니, 아버지와 어머니가 각각 서로 이웃하여 앉는 방법은 $(2\times 2!)^2=16$이고, 아들과 딸을 앉히는 방법은 2이다.

$\therefore\ (2\times 2!)^2\times 2=32$

㉡의 경우도 마찬가지이므로 32가지
따라서, 구하는 경우의 수는 $2\times 32=64$

24.



$A_{n+1}(x_{n+1},\ 0)$과 $B_{n+1}(0,\ x_{n+1})$의 중점이

$C_n(x_n,\ x_n)$이므로 $\dfrac{x_{n+1}}{2}=x_n$에서 $x_{n+1}=2x_n$

$x_1=1$이므로 $x_n=2^{n-1}$

$\therefore$ 삼각형 T_n의 넓이

$a_n=\dfrac{1}{2}\cdot 2^{n-1}\cdot 2^{n-1}=2^{2n-3}$

또, 삼각형 T_n의 세 변 위에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는

$(0,\ 2^{n-1})$부터 $(2^{n-1},\ 2^{n-1})$까지에서 $2^{n-1}+1$

$(2^{n-1},\ 0)$부터 $(2^{n-1},\ 2^{n-1}-1)$까지에서 2^{n-1}

선분 $\overline{A_nB_n}$ 위에서 $2^{n-1}-1$

$\therefore\ b_n=3\cdot 2^{n-1}$

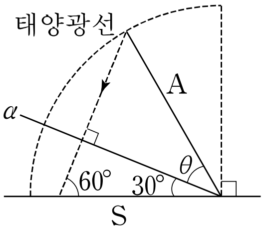
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot b_n}{a_n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 3\cdot 2^{n-1}}{2^{2n-3}+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^{2n-1}}{2^{2n-3}+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{2^n}}$$

$$=12$$

25.



본래 판의 넓이를 A라고 하자. 위의 그림과 같이 두 도형의 평면 α 위로의 정사영은 같으므로

$A\cdot\cos\theta=S\cdot\cos 30°$

$\therefore S=\dfrac{2}{\sqrt{3}}A\cdot\cos\theta$

한편, $A=4^2-\pi\cdot 1^2=16-\pi$이므로

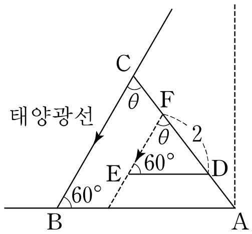
$$S=\frac{2\sqrt{3}}{3}(16-\pi)\cdot\cos\theta$$

따라서, $\cos\theta=1$일 때 즉, $\theta=0°$일 때 S는 최대가 된다.

$\therefore\ S=\dfrac{\sqrt{3}\,(32-2\pi)}{3}$

$\therefore\ a=32,\ b=-2\qquad \therefore\ a+b=30$

[다른 풀이]



위의 그림과 같이 $\angle\mathrm{ACB}=\theta$라고 하면

$30°\leqq\theta\leqq 180°$

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin 60°}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\theta}$, $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{8}{\sqrt{3}}\cdot\sin\theta$

$\triangle\mathrm{DEF}$에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{DF}}}{\sin 60°}=\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin\theta}$, $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\sin\theta$

따라서, 그림자의 넓이 S는

$$S=4\times\frac{8}{\sqrt{3}}\sin\theta-\pi\cdot 1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}(32-2\pi)\cdot\sin\theta$$

$\sin\theta=1$ 즉, $\theta=90°$일 때 넓이 S는 최대가 된다.

$\therefore\ \dfrac{\sqrt{3}\,(32-2\pi)}{3}\qquad \therefore\ a=32,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=32+(-2)=30$

[미분과 적분]

26. $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}=\dfrac{1}{3}$

$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$\tan\theta=2\sqrt{2}$

$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$

27. $y'=n\cdot\cos^{n-1}x\cdot(-\sin x)$

$\quad=-n\cdot\cos^{n-1}x\cdot\sin x$

$y''=-n(n-1)\cdot\cos^{n-2}x\cdot(-\sin x)\cdot\sin x$

$\quad -n\cdot\cos^{n-1}x\cdot\cos x$

$\quad =n\cdot\cos^{n-2}x\{(n-1)\cdot\sin^2 x-\cos^2 x\}$

$y''=0$를 만족하는 x에서 변곡점을 가지므로 변곡점의 x좌표를 x_n이라두면

$(n-1)\cdot\sin^2 x_n-\cos^2 x_n=0$

$\tan^2 x_n=\dfrac{1}{n-1}$

$\sec^2 x_n=1+\tan^2 x_n=1+\dfrac{1}{n-1}=\dfrac{n}{n-1}$

$\cos x_n=\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}\ \left(\because\ 0<x_n<\dfrac{n}{2}\right)$

$\therefore\ a_n=\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}\right)^n=\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

28. 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하면

$\dfrac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}=\dfrac{2}{3}x$

$x(e^{x^2}-2)=0$

$x=0,\ \pm\sqrt{\ln 2}$

$y=\dfrac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1},\ y=\dfrac{2}{3}x$는 기함수이므로 두 부분의 넓이가 같다.

$[0,\ \sqrt{\ln 2}]$에서 $y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{x\cdot e^{x^2}}{e^{x^2}+1}$의 정적분을 구하면

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln 2}}\left(\frac{2}{3}x-\frac{x\cdot e^{x^2}}{e^{x^2}+1}\right)dx$

$\displaystyle\quad=\frac{1}{3}\ln 2-\int_0^{\sqrt{\ln 2}}\left(\frac{x\cdot e^{x^2}}{e^{x^2}+1}\right)dx$ ...... ㉠

$e^{x^2}+1=t$로 치환하면

$2x\cdot e^{x^2}\cdot dx=dt$

$x=0\to t=2$

$x=\sqrt{\ln 2}\to t=3$

㉠에서

$\displaystyle\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{2}\cdot\int_2^3\left(-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{2}[\ln t]_2^3$

$\displaystyle\quad=\frac{5}{6}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3(>0)$

따라서, 구하는 넓이의 합은

$\dfrac{5}{3}\ln 2-\ln 3$

29. ㄱ. $b>a>1,\ x>1$이면

$\log(b^x)-\log(a^x)=x(\log b-\log a)>0$이므로

$b^x>a^x$

$\log_a x-\log_b x=\dfrac{\log x}{\log a}-\dfrac{\log x}{\log b}$

$=\dfrac{\log x}{\log a\cdot\log b}(\log b-\log a)>0$이므로

$\log_a x>\log_b x$

따라서, $b^x+\log_a x-(a^x+\log_b x)$

$=(b^x-a^x)+(\log_a x-\log_b x)>0$이고

$b^x+\log_a x>0,\ a^x+\log_b x>0$이므로

$\therefore\ f(x)>1$ $\quad\therefore$ 참

ㄴ. $b<a<1$이면 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}a^x=\lim_{x\to\infty}b^x=0$이고

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log x=\infty$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}=\lim_{x\to\infty}\frac{b^x+\frac{\log x}{\log a}}{a^x+\frac{\log x}{\log b}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{b^x}{\log x}+\frac{1}{\log a}}{\frac{a^x}{\log x}+\frac{1}{\log b}}=\frac{\log b}{\log a}\neq 0$

$\therefore$ 거짓

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x=-\infty$이므로

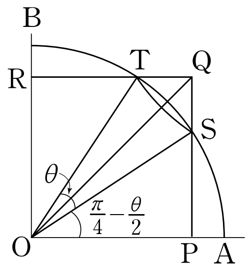
$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}=\lim_{x\to+0}\frac{b^x+\frac{\log x}{\log a}}{a^x+\frac{\log x}{\log b}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{b^x}{\log x}+\frac{1}{\log a}}{\frac{a^x}{\log x}+\frac{1}{\log b}}=\frac{\log b}{\log a}=\log_a b$

$\therefore$ 참

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

30.



$\angle\mathrm{SOP}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right),\ \overline{\mathrm{PS}}=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right),$

$\overline{\mathrm{QS}}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$D=$(사각형 OPQR)$-$(부채꼴 QST)

$=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}^2$

$\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}=t$라 하면 $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{4}$

$D=\cos^2 t-\frac{\pi}{4}(\cos t-\sin t)^2$

$=\cos^2 t-\frac{\pi}{4}(1-2\sin t\cos t)$

$=\frac{1+\cos 2t}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cdot\sin 2t$

$=\frac{1}{2}\cdot\cos 2t+\frac{\pi}{4}\cdot\sin 2t+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\pi^2+4}\sin(2t+\alpha)+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$

$\left(\text{단, } \cos\alpha=\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+4}},\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{\pi^2+4}}\right)$

D는 $2t=\frac{\pi}{2}-\alpha$일 때 최댓값을 가진다.

$\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)=\tan\alpha=\frac{2}{\pi}$일 때 최대이고 이 값은 주어진 범위를 만족한다.

$\therefore\ 10\pi\tan\theta=20$

[확률과 통계]

26. $\mathrm{P}(A|B^c)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^c)}{\mathrm{P}(B^c)}=\frac{\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(B)}{1-\mathrm{P}(B)}$

$=\frac{\frac{5}{8}-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

27. 전사건의 확률은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\left(k+\frac{2}{9}\right)+\left(k+\frac{1}{9}\right)+k+\left(k+\frac{1}{9}\right)+\left(k+\frac{2}{9}\right)$

$=5k+\frac{6}{9}=1$

$\therefore\ k=\frac{1}{15}$

28. X에 대한 확률분포표를 만들면 다음과 같다.

X	0	1	$\sqrt{3}$	2
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{2}{6}+\sqrt{3}\cdot\frac{2}{6}+2\cdot\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{3}(2+\sqrt{3})$

29. ㄱ. $\mathrm{E}(\overline{X_A})=m_1,\ \mathrm{E}(\overline{X_B})=m_2$

$\therefore$ 참

ㄴ. 모집단 B의 표준편차는 $\frac{\sigma}{2}$이고, 표본평균 $\overline{X_B}$의 크기는 n_2이므로 $\sigma(\overline{X_B})=\frac{\frac{\sigma}{2}}{\sqrt{n_2}}$

n_2는 1보다 크므로 $\sigma(\overline{X_B})<\frac{\sigma}{2}$

$\therefore$ 거짓

ㄷ. $b-a=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{4n_2}}$

$=1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

$d-c=2\times1.96\times\frac{\frac{\sigma}{2}}{\sqrt{n_2}}=1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

$\therefore\ b-a=d-c$ $\quad\therefore$ 참

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

30. (A의 최빈값)=26

(B의 중앙값)$=\frac{(5\text{번째 자료})+(6\text{번째 자료})}{2}$

$=\frac{(20+c)+(30+c)}{2}$

두 값이 같으므로, $c=1$

(A의 중앙값)=(8번째 자료)=30

(B의 평균)

$=\frac{10\times1+20\times4+30\times3+40\times2+3a+2b+4c}{10}$

$=\frac{264+3a+2b}{10}$

두 값이 같으므로, $3a+2b=36$(이때 $a=8, b=6$이다)

[이산수학]

26. (i) 변 ef를 지우는 경우

남아 있는 변 중 변 ac를 제외한 어느 한 변을 지우는 방법 : 7가지

(ii) 변 ef를 지우지 않는 경우

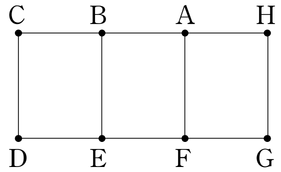
변 ab, be, ad, df 중 하나를 지우고, 변 eg, gh, fh 중 하나를 지우는 방법 : $4\times3=12$(가지)

$\therefore\ 7+12=19$

27. 사과 주스, 포도 주스, 감귤 주스를 한 개씩 일단 선택하고 생각한다.

3개의 주스 종류 중 5개를 선택하는 방법의 수 : $_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = 21$

28. 주어진 그래프는 다음과 같다.



서진 : 위의 그래프가 존재 ∴ 참

은지 : A, B, E, F가 홀수 차수의 점이므로 둘씩 둘씩 연결하는 변을 추가하면 모든 점이 짝수 차수가 된다. ∴ 참

현수 : A에서 출발하는 해밀턴경로는 ABCDEFGH 한 개 뿐이다. ∴ 거짓

29. $a_1 = 12$

$a_2 = a_1 \cdot 2^2$

$a_3 = a_1 \cdot 3^2$

$\vdots$

$a_n = a_1 \cdot n^2 = 12n^2$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 12k^2$$

$$= 12 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 4620$$

$n(n+1)(2n+1) = 10 \cdot 11 \cdot 21$이므로 $n = 10$

30. kg당 가치로 누적무게와 누적점수를 표로 나타내면 다음과 같다.

물품	무게 (kg)	가치 (점)	kg당 가치	누적 무게	누적 점수
카메라	0.5	3	6	0.5	3
침낭	2	8	4	2.5	11
비상약품	1	3	3	3.5	14
비상식량	1.6	4	2.5	5.1	18
여벌옷	2.5	5	2	7.6	23
식기・버너세트	4	6	1.5	11.6	29
손전등	0.8	1	1.25	12.4	30

8 kg 이하로 짐을 꾸리려면 4.4 kg 이상의 짐을 담지 않아야 했는데, 위의 표처럼 하는 것이 가치의 손실이 가장 적다.

$\therefore\ a = 7.6 \qquad 10a = 76$

• 수리 '나' 형 •

정 | 답 |

1. ②	2. ①	3. ②	4. ①	5. ④
6. ①	7. ④	8. ④	9. ⑤	10. ③
11. ③	12. ⑤	13. ②	14. ②	15. ③
16. ③	17. ②	18. 256	19. 10	20. 25
21. 102	22. 110	23. 64	24. 12	25. 13
26. ⑤	27. ③	28. ⑤	29. ①	30. 37

출 | 제 | 문 | 항 | 분 | 석 |

문항	난이도	출제 단원	유의점
1	하	지수와 로그	간단한 로그 계산
2	하	행렬	간단한 행렬 계산
3	하	극한	등비수열의 극한
4	하	확률	배반사건의 확률
5	중	확률	조건부 확률
6	중	통계	이산확률분포의 평균
7	하	지수·로그함수	지수, 로그그래프의 개형
8	중	통계	이항분포의 평균
9	상	지수와 로그	지표와 가수
10	상	지수·로그함수	지수함수의 그래프
11	상	순열과 조합	경우 나누기, 여사건을 이용한 경우의 수
12	상	행렬	역행렬
13	중	통계	표본평균과 정규분포
14	하	수열	등비수열과 로그의 계산
15	중	지수·로그함수	로그함수의 그래프
16	상	행렬	행렬과 참·거짓
17	상	수열의 극한	도형과 무한급수
18	하	수열	수열의 합
19	중	로그	상용로그의 계산
20	중	지수와 로그	지수·로그 및 변환 공식
21	중	순열과 조합	이항정리 응용
22	상	수열	여러 가지 수열
23	상	순열과 조합	경우의 수
24	중	수열의 극한	도형과 무한급수
25	하	지수·로그함수	지수방정식
26	중	확률	조건부 확률
27	상	행렬	행렬과 일차연립방정식
28	상	수열	교대 수열
29	중	수열의 극한	Σ의 계산
30	중	통계	연속확률변수

풀 | 이 |

1. $2^{2\log_3 9} = 2^{\log_3 3^4} = 2^4 = 16$

2. $A(2A^{-1}+3E) = 2E+3A$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 15 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 15 & -10 \end{pmatrix}$$
따라서, 모든 성분의 합은 22이다.

3. $$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n - 2^n}{5^{n+1}+3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{5+3\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{1}{5}$$

4. A와 B는 배반 사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$
$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A-B)+\mathrm{P}(B-A)$
$= \mathrm{P}(A\cap B^c)+\mathrm{P}(B\cap A^c)$
$= \frac{1}{5}+\frac{1}{4} = \frac{9}{20}$

5. 혈액형이 B형일 확률을 $\mathrm{P}(B)$
남학생일 확률은 $\mathrm{P}(M)$
Rh^+형일 확률은 $\mathrm{P}(R^+)$라 하면
$$\mathrm{P}(M\cap R^+|B) = \frac{\mathrm{P}(M\cap R^+\cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{150}{1000}}{\frac{150+6+80+4}{1000}} = \frac{150}{240} = \frac{5}{8}$$

6. 확률의 총합은 1이므로
$\frac{4}{10}+3p=1 \quad \therefore p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i$$
$$= 1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}$$
$$= \frac{3+4+3+8+10}{10} = \frac{28}{10} = \frac{14}{5}$$
$\therefore\ \mathrm{E}(5X+3) = 5\times\frac{14}{5}+3 = 17$

7. $f(x)$는 기울기 1, y절편이 1인 직선의 방정식이므로 $f(x)=x+1$
$y = 2^{2-f(x)} = 2^{2-x-1} = 2^{1-x} = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x$
따라서, 그래프의 개형으로 적당한 것은 ④이다.

8. $y=ax$와 $y=x^2-2x+4$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $x^2-2x+4=ax$가 서로 다른 두 실근을 가지면 되므로 $x^2-(2+a)x+4=0$에서

$D=(2+a)^2-16>0$

$a^2+4a-12>0$

$a>2$ 또는 $a<-6$

이므로 $a=3,\ 4,\ 5,\ 6$인 경우이므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{3}$이다.

하나의 주사위를 300회 던지는 독립시행이므로

$\mathrm{B}\left(300,\ \dfrac{2}{3}\right)$에서 $\mathrm{E}(X)=n\times p=200$

9. $\log k=n+\alpha\ \ (0\leqq\alpha<1)$

n은 정수, k는 자연수이므로

$\mathrm{P}_k(\alpha,\ n)$이 $y=(\sqrt{10})^x$ 위에 있으려면

$n=(\sqrt{10})^{\alpha}=10^{\frac{\alpha}{2}}$

$10^0\leqq 10^{\frac{\alpha}{2}}<10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}\ \ (\because\ 0\leqq\alpha<1)$

$\therefore\ 1\leqq n<3.\mathrm{xxx}\quad\therefore\ n=1,\ 2,\ 3$

$n=1$의 경우

$1=10^{\frac{\alpha}{2}}\quad\therefore\ \alpha=0$

$\log k=1$에서 $\quad\therefore\ k=10$

$n=2$의 경우

$2=10^{\frac{\alpha}{2}}\quad 4=10^{\alpha}\quad\therefore\ \alpha=\log 4$

$\therefore\log k=2+\log 4=\log 400\quad\therefore\ k=400$

$n=3$의 경우

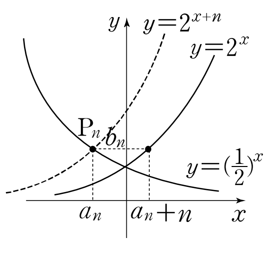
$3=10^{\frac{\alpha}{2}}\quad 9=10^{\alpha}\quad\therefore\ \alpha=\log 9$

$\log k=3+\log 9=\log 9000\quad\therefore\ k=9000$

따라서, 모든 k값의 합은 9410 이다.

10. $y=2^{x+n}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축 방향으로 $-n$만큼 평행이동 시킨 그래프이고

$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프와 y축에 대해 대칭이다.



ㄱ. $b_n=2^{a_n+n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{a_n}=2^{-a_n}$

$\therefore\ a_n+n=-a_n,\quad a_n=\dfrac{n}{2}$

따라서, a_n은 공차 $\dfrac{1}{2}$인 등차수열이다. $\quad\therefore$ 참

ㄴ. $b_n=2^{-a_n}=2^{-\frac{n}{2}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

$b_m=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^m$

$b_nb_m=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^m=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+m}=b_{n+m}$

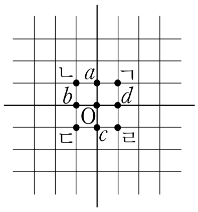
$\therefore$ 참

ㄷ. $2b_n<b_{n+1}$인 n이 존재한다고 하면

$2\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n<\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$에서

$2<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이 되어 모순이다. $\quad\therefore$ 거짓

11.



O에서 처음 이동방향은 전・후・좌・우 4가지가 있다.

첫 이동 후 $a,\ b,\ c,\ d$의 위치에서 직진하는 경우 그 다음 이동은 직진・좌・우 세 가지가 있고 또 그 이후도 직진・좌・우 세 가지 이동이 가능하다.

a — 직진 — 직진 — 직진
　　　　　　좌　　　좌
　　　　　　우　　　우

b — 직진

c — 직진　　　⋮

d — 직진

$4\times 3\times 3=36$ ………………… ㉠

첫 이동 후 $a,\ b,\ c,\ d$의 위치에서 좌・우 이동을 선택해서 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ의 위치로 이동한 경우 다음 이동은 직진 좌・우 세 가지가 있으나 한 방향으로 회전하게 되면 마지막 이동의 경우 원점 방향으로는 움직일 수 없으므로 마지막 이동 방법이 2가지이다.

첫이동	두번째이동	세번째이동	네번째이동
a	좌	직진	직진
			좌
			우
		우	직진
			좌
			우
		좌	직진
			좌
	우		

첫 이동이 b, c, d인 경우도 마찬가지이므로

$4\times2\times(3+3+2)=64$가지 …… ㉡

$\therefore$ ㉠ + ㉡ $=100$가지

12. ㄱ. $A\in S$이므로 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면

$a\neq b,\ a\neq c, a+d=b+c,\ 2A=\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$에서

$2a\neq 2b\ \ 2a\neq 2c\ \ 2a+2d=2b+2c\ \ 2A\in S$

$\therefore$ 참

ㄴ. $X=\begin{pmatrix} 1 & p \\ q & r \end{pmatrix}$ 1, p, q, r이 공차가 양수인 등차수열이므로 $1\neq p,\ 1\neq q,\ 1+r=p+q\ \ \therefore\ X\in S$

$\therefore$ 참

ㄷ. $A\in S$이면 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 할 때

$a+d=b+c=k$라 하면

A가 역행렬을 가진다는 것은

$ad-bc=a(k-a)-b(k-b)=(a-b)(k-a-b)=0$인데, 이때 $a-b\neq0$이므로 $k=a+b$이다. 그런데 $b+c=k$이므로 $a+b=k$이면 $c=a$가 되므로 주어진 조건에 모순이다.

$\therefore$ A는 역행렬을 가진다. $\therefore$ 참

13. $f(x)=f(100-x)$에서

$y=f(x)$의 그래프는

직선 $x=50$에 대칭인 그래프이다.

$\therefore\ m=50$

크기 25인 표본을 임의 추출할 때 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 $N\left(50,\ \left(\frac{10}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

$\mathrm{P}(44\leqq\overline{X}\leqq48)=\mathrm{P}\left(\frac{44-50}{2}\leqq Z\leqq\frac{48-50}{2}\right)$

$\therefore\ \mathrm{P}(-3\leqq Z\leqq-1)=\frac{0.9974}{2}-\frac{0.6826}{2}$

$=0.1574$

14. n번 시행 후 빵의 가격을 P_n 무게를 W_n이라 하면 단위 무게 당 가격은 $\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{W}_n}$이다.

$\frac{\mathrm{P}_{n+1}}{\mathrm{W}_{n+1}}=\frac{\mathrm{P}_n}{0.9\mathrm{W}_n}=\frac{10}{9}\cdot\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{W}_n}$

$\therefore$ 한 번의 시행에서 단위 무게 당 가격은 $\frac{10}{9}$배가 되므로 n번 시행하면 $\left(\frac{10}{9}\right)^n$배가 된다.

$\left(\frac{10}{9}\right)^n\geqq\frac{3}{2},\ n(1-2\log3)\geqq\log3-\log2$

$n\geqq\frac{0.1761}{1-0.9542}=\frac{0.1761}{0.0458}=3.\mathrm{xxx}$

$\therefore\ n=4$

15. $f(x)=2^{x-2}+1,\ g(x)=\log_2(x-1)+2$이므로

$y=f(x)$의 역함수를 구해보면

$y=2^{x-2}+1,\ y-1=2^{x-2},\ x-2=\log_2(y-1)$

$\therefore\ y=\log_2(x-1)+2=g(x)$

$\therefore\ f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수이다.

ㄱ. $f^{-1}(5)(g(5)+1)=\{g(5)^2\}+g(5)=20$

($\because\ g(5)=\log_2 4+2=4$) $\therefore$ 참

ㄴ. $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수이므로 $y=x$에 대해 대칭이다. $\therefore$ 참

ㄷ. $y=f(x)$는 (2, 2)를 지나므로 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점이 존재한다. $y=f(x)$는 증가함수이므로

$y=x$와 $y=f(x)$의 교점은 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점이 된다. $\therefore$ 거짓

16. $B=A-\frac{p+q}{2}E,\ k=\boxed{\frac{p-q}{2}}$라 하면

$B-kE=A-pE$이고 $B+kE=A-qE$이므로

$B-kE$와 $B+kE$는 모두 역행렬을 갖지 않는다.

따라서, $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면

$B-kE=\begin{pmatrix} a-k & c \\ b & d-k \end{pmatrix},\ B+kE=\begin{pmatrix} a+k & b \\ c & d+k \end{pmatrix}$

에서 각각의 행렬식을 구하면

$(a-k)(d-k)-bc=0$이고 $(a+k)(d+k)-bc=0$이다.

$\therefore ad-bc-(a+d)k+k^2=0$ …… ㉠

$ad-bc+(a+d)k+k^2=0$ …… ㉡

㉠$-$㉡ 하면

$-2(a+d)k=0$

$k\neq0$이므로 $a+d=\boxed{0}$

㉠에 대입하면 $ad-bc=-k^2$

또, $B^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\frac{1}{-k^2}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}=\frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

($\because\ a+d=0$)

즉 $B^{-1}=\frac{1}{k^2}\boxed{B}$ …… ㉢

㉢ $\times k^2B$ 하면

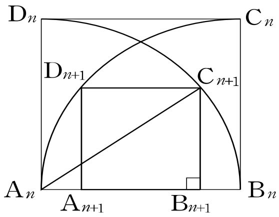
$k^2E=B^2$

$\therefore A^2-(p+q)A+pqE=(A-pE)(A-qE)$

$=(B-kE)(B+kE)=B^2-k^2E$

$=O$

17.



$\overline{A_nB_n}=x_n$, $\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=x_{n+1}$이라면

$\overline{A_nA_{n+1}}=\dfrac{x_n-x_{n+1}}{2}$이므로

$\overline{A_nB_{n+1}}=\dfrac{x_n+x_{n+1}}{2}$

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=x_{n+1}$

$\overline{A_nC_{n+1}}=x_n$

$\therefore$ 삼각형 $A_nB_{n+1}C_{n+1}$에서 피타고라스정리에 의해

$$x_n{}^2=\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right)^2+x_{n+1}{}^2$$

$$5x_{n+1}{}^2+2x_nx_{n+1}-3x_n{}^2=0$$

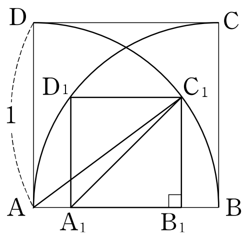
$$\therefore\ (5x_{n+1}-3x_n)(x_{n+1}+x_n)=0$$

$$\therefore\ x_{n+1}=\frac{3}{5}x_n$$

$$\therefore\ S_{n+1}=\frac{9}{25}S_n,\quad S_1=\frac{9}{25}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{9}{16}$$

[다른 풀이]



$\overline{B_1C_1}=x$하면,

$\overline{A_1C_1}=\sqrt{2}\,x$,

$\overline{AA_1}=\dfrac{1-x}{2}$

$\overline{AC_1}=1$($\because$ 반지름)

$\angle AA_1C_1=135°$

$\therefore$ 삼각형 AA_1C_1에서 제2코사인정리에 의해

$$1^2=\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^2+(\sqrt{2}\,x)^2$$
$$-2\times\frac{1-x}{2}\times\sqrt{2}\,x\times\cos 135°$$

$$1=\frac{(1-x)^2}{4}+2x^2+(1-x)x$$

$$5x^2+2x-3=0$$
$$(5x-3)(x+1)=0$$

$$\therefore\ x=\frac{3}{5}$$

$$\therefore\ S_1=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25},$$

$$\overline{BC}:\overline{B_1C_1}=\overline{B_1C_1}:\overline{B_2C_2}=\overline{B_2C_2}:\overline{B_3C_3}=\cdots\cdots$$
$$=1:\frac{3}{5}$$

$\therefore$ S_n은 $S_1=\dfrac{9}{25}$, 공비 $\dfrac{9}{25}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{9}{16}$$

18. $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqq 2)$이므로

$$a_n=2^n-1-(2^{n-1}-1)$$
$$=2^n-2^{n-1}$$
$$=2^{n-1}(n\geqq 2)$$

$a_1=S_1=2^1-1=1$이므로

$n\geqq 1$일 때 $a_n=2^{n-1}$

$$\therefore\ a_9=2^{9-1}=2^8=256$$

19. 주어진 관계식에서

$6.15=0.67\times\log(0.37E_1)+1.46$ …… ㉠

$5.48=0.67\times\log(0.37E_2)+1.46$ …… ㉡

㉠－㉡에서

$$0.67=0.67(\log 0.37E_1-\log 0.37E_2)$$

$$\therefore \log\frac{E_1}{E_2}=1\qquad\therefore\ \frac{E_1}{E_2}=10$$

20. $3^{a+b}=4$에서 $a+b=\log_3 4$ …… ㉠

$2^{a-b}=5$에서 $a-b=\log_2 5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=\log_3 4\times\log_2 5$$
$$=2\log_3 2\times\frac{\log_3 5}{\log_3 2}$$
$$=2\times\log_3 5$$
$$=\log_3 5^2$$

$$\therefore\ 3^{a^2-b^2}=25$$

21. $(1-x)^4(2-x)^3$의 전개식에서 x^2의 계수는

$${}_4C_0\cdot 1^4\times{}_3C_2\cdot 2^1+{}_4C_1\cdot(-1)^1\times{}_3C_1\cdot 2^2(-1)^1$$
$$+{}_4C_2\cdot(-1)^2\times{}_3C_0\cdot 2^3$$
$$=1\times 3\times 2+4\times 3\times 4+6\times 8$$
$$=6+48+48=102$$

22. $\sqrt{k}$를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하여 n이므로

$$n-\frac{1}{2}\leqq\sqrt{k}<n+\frac{1}{2}$$

$$n^2-n+\frac{1}{4}\leqq k<n^2+n+\frac{1}{4}$$

n과 k가 자연수이므로

$n^2-n+1\leqq k\leqq n^2+n$ …… ㉠

㉠을 만족하는 자연수 k의 개수는

$a_n=(n^2+n)-(n^2-n+1)+1$
$=2n$

$\therefore \sum_{i=1}^{10} a_i=\sum_{i=1}^{10} 2i=2\times\frac{10\times 11}{2}=110$

23. $\begin{cases} \text{1열 : 할아버지, 할머니} \\ \text{2열 : 아버지, 어머니} \end{cases}$ …… ㉠

$\begin{cases} \text{1열 : 아버지, 어머니} \\ \text{2열 : 할아버지, 할머니} \end{cases}$ …… ㉡

두 가지 경우가 있다.

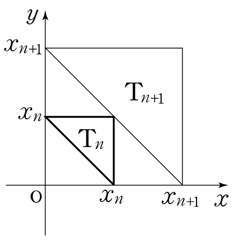
㉠의 경우 : 할아버지와 할머니, 아버지와 어머니가 각각 서로 이웃하여 앉는 방법은 $(2\times 2!)^2=16$이고, 아들과 딸을 앉히는 방법은 2이다.

$\therefore\ (2\times 2!)^2\times 2=32$

㉡의 경우도 마찬가지이므로 32가지

따라서, 구하는 경우의 수는 $2\times 32=64$

24.



$A_{n+1}(x_{n+1},\ 0)$과 $B_{n+1}(0,\ x_{n+1})$의 중점이

$C_n(x_n,\ x_n)$이므로 $\frac{x_{n+1}}{2}=x_n$에서 $x_{n+1}=2x_n$

$x_1=1$이므로 $x_n=2^{n-1}$

$\therefore$ 삼각형 T_n의 넓이

$a_n=\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}\cdot 2^{n-1}=2^{2n-3}$

또, 삼각형 T_n의 세 변 위에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는

$(0,\ 2^{n-1})$부터 $(2^{n-1},\ 2^{n-1})$까지에서 $2^{n-1}+1$

$(2^{n-1},\ 0)$부터 $(2^{n-1},\ 2^{n-1}-1)$까지에서 2^{n-1}

선분 $\overline{A_nB_n}$ 위에서 $2^{n-1}-1$

$\therefore\ b_n=3\cdot 2^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot b_n}{a_n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 3\cdot 2^{n-1}}{2^{2n-3}+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^{2n-1}}{2^{2n-3}+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{2^n}}$$

$$=12$$

25. $\begin{cases} 3\cdot 2^x-2\cdot 3^y=6 \\ 2^{x-2}-3^{y-1}=-1 \end{cases}$ 에서

$2^x=X,\ 3^y=Y$라 하면

$\begin{cases} 3X-2Y=6 & \text{…… ㉠} \\ \frac{1}{4}X-\frac{1}{3}Y=-1 & \text{…… ㉡} \end{cases}$

㉡$\times 12$: $3X-4Y=-12$ …… ㉢

㉠$-$㉢을 하면 $2Y=18\quad \therefore\ Y=9$

$Y=9$를 ㉠에 대입하면 $3X=24\quad \therefore\ X=8$

$\therefore\ X=8,\ Y=9$에서 $x=3,\ y=2$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=3^2+2^2=13$

26. 철수가 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 6일 때 영희, 은지가 꺼낸 공이 하나는 6보다 크고 하나는 6보다 작을 확률은

$\frac{{}_4C_1\times{}_5C_1}{{}_9C_2}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

27. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하자.

ㄱ. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$에서 임의의 실수 $x,\ y$에 대해

$(a-1)x+by=0,\ cx+dy=0$이므로

$a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=0$

$\therefore\ A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=A\quad \therefore$ 참

ㄴ. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$에서 임의의 실수 $x,\ y$에 대해

$ax+(b+1)y=0,\ (c-1)x+dy=0$이므로

$a=0,\ b=-1,\ c=1,\ d=0$

$\therefore A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$\therefore A^3=-A\quad \therefore$ 거짓

ㄷ. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$에서 임의의 실수 $x,\ y$에 대해

$(a+1)x+by=0,\ cx+(d+1)y=0$이므로

$a=-1,\ b=0,\ c=0,\ d=-1$

$\therefore\ A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=E$

$\therefore\ A^{-1}=A\quad \therefore$ 참

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

28. $a_n=3+(-1)^n$과 $\cos\frac{2n\pi}{3}$, $\sin\frac{2n\pi}{3}$를 나열하면 아래와 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	
a_n	2	4	2	4	2	4	2	
$\cos\frac{2n\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	
$\sin\frac{2n\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	

2009는 홀수이고 $2009 = 3 \times 669 + 2$이므로

$a_{2009} = 2,\ \cos\frac{2 \times 2009\pi}{3} = -\frac{1}{2},$

$\sin\frac{2 \times 2009\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서, P_{2009}와 같은 점은 보기에서 P_5이다.

29. $f(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(x^2 - \frac{2k}{n}x + \frac{k^2}{n^2}\right)$

$= nx^2 - \frac{2x}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= nx^2 - (n+1)x + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$

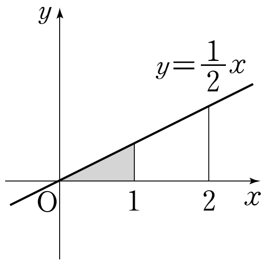
$= n\left\{x^2 - \frac{n+1}{n}x + \frac{(n+1)^2}{4n^2}\right\} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} - \frac{(n+1)^2}{4n}$

$\therefore$ $f(x)$의 최솟값은 $x = \frac{n+1}{2n}$일 때

$a_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} - \frac{(n+1)^2}{4n} = \frac{n^2-1}{12n}$

따라서, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{12n^2} = \frac{1}{12}$

30.



위의 그림에서 $\mathrm{P}(0 \leqq \mathrm{X} \leqq 1) = \frac{1}{4}$

매회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{1}{4}$

따라서, 3회의 독립시행에서 사건 A가 2회 이상 일어날 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + {}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$

$\therefore$ $p + q = 37$