수리 영역

출 | 제 | 경 | 향 |

새 정부가 들어선 이후 새 정부의 교육 철학이나 지향으로 미루어 볼 때 누구나 수능이 앞으로 어려워짐을 예상했고, 작년 6월 평가원 모의고사는 그런 우려 속에서 소위 “불수능”의 예고편으로서의 성격 때문에 비상한 관심을 끌었었다. 그러나 높은 난이도에 대한 강박 때문인지는 몰라도 새로운 발상이나 착안을 묻기보다는 기존 사고의 틀 속에서 이리저리 문제를 비틀거나 지나치게 많은 단계를 거치게 하고 계산을 복잡하게 만들어서 많은 수험생들에게 부담을 많이 주었다. 범위가 제한된 6월 모의고사에서 다양한 수학적 발상과 주제를 다루는 것은 힘들다고 볼 때 어떤 식으로 높은 난이도를 유지할 것 인가에 이번 시험에 대해 많은 관심과 우려가 있었다.

결론적으로 이번 평가원 모의고사는 어느 정도 성공적인 것으로 보인다. 작년 6월 모의고사의 문제 질의 조악함을 극복하고 난이도는 높게 유지하면서 비교적 간단한 계산 과정을 통해서 정확한 수학적 개념과 원리에 대한 원론적 접근이나 발상을 요구하는 문제들이 다수 보이면서 평가원의 문제를 통해 앞으로 무엇을 어떻게 공부해나가야 할지 잘 보여 주는 시험이 되었다.

학생들에게 비교적 부담스러웠던, 새로운 기호를 정의하고 그 정의에 따라 낯선 성질들을 조사하던 유형의 문제를 대폭 줄이고, 상당한 시간을 요구하는 <보기>형 문제의 수도 꽤 줄여서 학생들의 시간 부족 현상을 줄이려는 나름대로의 노력이 엿보였다.

그러나 문제의 착안점을 제대로 잡지 못하면 손대기 힘든 문제들이 보이는데 문장으로 주어진 조건들 속에서 구체적 수식이나 그래프에 대해 수학적 상상력을 요구하거나 치환 등을 통해서 주어진 수식과 그래프의 연관성이나 문제 해결의 포인트를 찾아내야 하는 등의 정확한 수학적 개념이 있어야 자신 있게 접근할 수 있는 문제들이 보였다.

전반적으로 수열의 함수적 접근이나 절댓값 기호를 가지는 함수의 성질, 부등식의 그래프로의 접근 등 수학적인 이해력이 상당히 요구되는 주제들이 많이 포함되었고 특히 정수 조건, 자연수 조건을 다루는 문제, 홀짝 등의 잉여류에 대한 사고를 필요로 하는 문제들이 10-(가), (나)의 기초가 약한 학생들에겐 매우 힘든 문제로 보였을 것이다.

그러나 이러한 문제들이 문제의 착안점만 정확히 읽어 내면 쓸데없이 계산에 노력을 낭비할 일 없이 깔끔하게 답이 나오도록 잘 세팅되어 있어서 개념을 정확히 잘 알고 있는 학생들은 시간이 부족해서 풀 수 있는 문제를 놓치는 일이 없도록 배려한 느낌이다.

‘가’형의 경우는 까다로운 문제가 많아 작년 6월과 비슷하거나 약간 어려울 듯하고 수능보다는 약간 어려웠으리라 생각된다.

‘나’형은 작년 6월에 비해 상대적으로 편하고 깔끔한 편이라 작년 6월보다는 점수가 상승할 것으로 보이고 수능과 비교해서는 비슷하거나 조금 어렵게 보인다.

작년 6월 시험의 고난이도와 문제의 조악함의 딜레마를 작년 9월 모의평가와 수능을 거치면서 어느 정도 극복하고 7차 교육과정 후반기 고난이도의 기조에 맞는 문제의 출제 경향이 틀을 잡아가는 느낌이다.

학 | 습 | 대 | 책 |

기본적인 개념들에 대한 정확한 이해를 바탕으로 각 단원들을 공부할 때 각 단원의 중요한 사항과 수학적인 주제들을 잘 연구하고 그 기본적인 응용 부분까지 숙지해야 한다. 어렴풋하게 정리한 지식으로는 문제들에 제대로 접근하기 힘들다.

기출 문제 등을 통해 출제자가 묻고자 하는 것들을 어떻게 접근할 것인가 잘 연구해야 한다. 몇 개의 유형만 통째로 외우는 틀에 박힌 암기식 사고로는 이러한 문제들을 해결해 내기 힘들다. 각 문제들의 조건을 비교하고 차이와 동일함을 분석하고, 착안점과 접근법에 따라 문제들을 분류해 보고 각 문제에 포함된 출제자의 메시지를 읽어 내도록 노력해 보자.

문제의 조건에 따라 잘 나누어서 우리가 해결할 수 있는 단계로 문제를 낮추어 내는 훈련을 하거나 치환 등을 통해 문제를 구성하는 큰 덩어리 사이의 구조에 대한 인식을 높이자.

• 수리 ‘가’ 형 •

정 | 답 |

1. ④	2. ⑤	3. ⑤	4. ②	5. ③
6. ①	7. ②	8. ①	9. ③	10. ①
11. ④	12. ②	13. ①	14. ⑤	15. ③
16. ①	17. ④	18. 28	19. 10	20. 11
21. 9	22. 5	23. 90	24. 12	25. 19

〔미분과 적분〕

26. ⑤	27. ④	28. ⑤	29. ③	30. 20

〔확률과 통계〕

26. ②	27. ③	28. ②	29. ⑤	30. 154

〔이산수학〕

26. ②	27. ⑤	28. ②	29. ③	30. 455

출 | 제 | 문 | 항 | 분 | 석 |

문항	난이도	출제 단원	출제 의도
1	하	지수 · 로그	지수 · 로그 계산
2	하	행렬	행렬의 연산과 성분합
3	하	함수의 극한	$\frac{0}{0}$꼴함수의 극한 구하기
4	중	미분	접선과 미분계수 이해
5	중	통계	표본평균의 분포 이해
6	중	미분	미분계수와 극한
7	중	방정식 · 부등식	분수방정식 근의 합
8	상	수열	홀짝 이용한 주기
9	상	방정식 · 부등식	그래프를 이용한 분수방정식
10	상	함수의 극한	절대값 이용 합성함수 극한
11	하	지수 · 로그함수	실생활 응용하기
12	중	수열의 극한	닮음이용 무한급수
13	상	통계	통계이용 조건부 확률
14	상	미분	절대값 변형 후 극대 · 극소
15	상	경우의 수	이항정리이용 연역적 추론
16	중	지수 · 로그함수	그래프 수식 표현
17	중	행렬	행렬의 성분과 짝홀
18	하	미분	미분계수 계산
19	중	함수의 극한	미정계수 결정과 극한
20	중	미분	최대 · 최소와 미분
21	상	방정식 · 부등식	그래프 이용한 무리방정식
22	중	수열	$\sum$의 정의와 함수의 그래프 해석
23	상	함수의 극한	불연속함수와 연속함수 곱
24	상	미분	그래프 개형 이해
25	상	경우의 수	이동경로의 개수 구하기
26	하	삼각함수	삼각함수 합차를 곱으로
27	중	초월함수의 극한	e 함수의 극한과 치환
28	중	삼각함수	삼각방정식과 그래프
29	상	초월함수의 극한	함수의 합성과 극한
30	중	초월함수의 극한	도형과 극한
26	하	자료의 요약	대푯값, 산포도
27	하	조합	조합 계산
28	중	확률	독립사건의 확률 계산
29	중	자료의 정리	대푯값(중앙값)
30	상	확률	확률계산
26	하	그래프	완전그래프
27	중	순열과 조합	순열조합
28	중	경우의 수	같은 것을 포함하는 순열의 수
29	중	여러 가지 회로	여러 가지 회로
30	상	조합	조합

풀 | 이 |

1. (주어진 식)$=2^2\times(2^3)^{\frac{2}{3}}$

$=4\times2^2=16$

2. $A=(A-2B)+2B$

$=\begin{pmatrix}-7 & -2\\ 6 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -2\\ -6 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

따라서, A의 모든 성분의 합은 -5 이다.

3. $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt{x+8}-3}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)(\sqrt{x+8}+3)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x^2+1)(\sqrt{x+8}+3)$

$=2\times(3+3)$

$=12$

4. 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-2,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$y=-4(x+2)+4,\ y=-4x-4$ ······㉠

㉠이 곡선 $y=x^3+ax-2$에 접하는 접점을 $(t,\ -4t-4)$라고 하면

$y'=3x^2+a$에서 $3t^2+a=-4$ ······㉡

$t^3+at-2=-4t-4$ ······㉢

㉡에서 $a=-3t^2-4$

㉢에 대입하여 정리하면, $t=1$

$\therefore\ a=-3-4=-7$

5. 모집단이 $\mathrm{N}(65,\ 15^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 $\mathrm{N}(65,\ 3^2)$인 분포를 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}\geqq 68)=\mathrm{P}\left(Z\geqq\frac{68-65}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geqq1)$

$=0.5-0.3413$

$=0.1587$

6. $y=f(x)$의 그래프가 y축 대칭이므로 $f(x)$는 우함수이다.

$\therefore\ f(-x)=f(x)$

또한, $f'(2)=-3$에서 $f'(-2)=-f'(2)$

$\therefore\ f'(-2)=3$

$\therefore \lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(-2)}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times\frac{x^2-4}{x-(-2)}}{\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times(x-2)}{\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}}$

$=\frac{f'(4)\times(-4)}{f'(-2)}$

$=\frac{6\times(-4)}{3}$

$=-8$

7. $\frac{x^2+x+1}{x-2}-\frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{(x-1)(x-2)}-2$에서

$\frac{x^3-x^2+3}{(x-1)(x-2)}=\frac{-2x^2+6x-1}{(x-1)(x-2)}$

$\therefore\ x^3+x^2-6x+4=0,\ x\neq1,\ x\neq2$

$\therefore\ (x-1)(x^2+2x-4)=0,\ x\neq1,\ x\neq2$

$\therefore\ x^2+2x-4=0$

따라서, 구하는 실근의 합은 -2 이다.

8. 자연수 k에 대하여

$n=4k$일 때 $a_n=(-1)^{\frac{4k(4k+1)}{2}}=1$

$n=4k-1$일 때 $a_n=(-1)^{\frac{(4k-1)\cdot4k}{2}}=1$

$n=4k-2$일 때 $a_n=(-1)^{\frac{(4k-2)(4k-1)}{2}}=-1$

$n=4k-3$일 때 $a_n=(-1)^{\frac{(4k-3)(4k-2)}{2}}=-1$

$na_n=b_n$이라 하면

$b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k}$

$=-(4k-3)-(4k-2)+(4k-1)+4k=4$

이고 $2010=4\times502+2$이므로

$\therefore\ \sum_{n=1}^{2010}na_n=\sum_{n=1}^{2010}b_n=4\times502+b_{2009}+b_{2010}$

$=2008-2009-2010$

$=-2011$

9. $\frac{x}{f(2x)-1}=\frac{1}{2}$에서

$\frac{2x}{f(2x)-1}\geqq1$

$2x=t$라 하면,

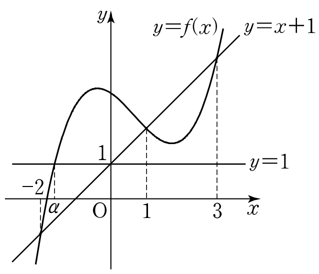
$\frac{t}{f(t)-1}\geqq1$

(ⅰ) $f(t)-1>0$일 때

$t\geqq f(t)-1,\ t+1\geqq f(t)$

$\therefore\ 1\leqq t\leqq3$

$\therefore \dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$



(ii) $f(t)-1<0$일 때

$t \leqq f(t)-1$,

$t+1 \leqq f(t)$

$\therefore -2 \leqq t < \alpha$

$\therefore -1 \leqq x < \dfrac{\alpha}{2}$

따라서, (i), (ii)에서 x의 최댓값 $M=\dfrac{3}{2}$,

최솟값 $m=-1$ 이다.

$\therefore M+m=\dfrac{1}{2}$

10. $g(x)=\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}=\begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$

$h(x)=\dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}=\begin{cases} f(x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

ㄱ. $\lim\limits_{x \to 1+0} h(x)=\lim\limits_{x \to 1+0} f(x)=0$

$\lim\limits_{x \to 1-0} h(x)=\lim\limits_{x \to 1-0} f(x)=-1$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1} h(x)$는 존재하지 않는다. $\therefore$ 거짓

ㄴ. $x \neq 0$일 때, $g(x)=0$

$\therefore h(g(x))=h(0)=0$

$x=0$일 때, $g(x)=1$

$\therefore h(g(x))=h(1)=0$

$\therefore h(g(x))=0$이므로, $[-1,\ 2]$에서 연속이다.

$\therefore$ 참

ㄷ. $(g \circ h)(0)=g(h(0))=g(0)=1$

$\lim\limits_{x \to 0+0} g(h(x))=0 (\because h(x) \to 0-0)$

$\lim\limits_{x \to 0-0} g(h(x))=0 (\because h(x) \to 0-0)$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} g(h(x))=0$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} (g \circ h)(x) \neq (g \circ h)(0)$ $\therefore$ 거짓

11. $S=P-20\log\left(\dfrac{4\pi fR}{c}\right)$에서

$S=-25$일 때 $-25=P-20\log\left(\dfrac{4\pi fR_A}{c}\right) \cdots\cdots$ ㉠

$S=-5$일 때 $-5=P-20\log\left(\dfrac{4\pi fR_B}{c}\right) \cdots\cdots$ ㉡

㉡-㉠에서 $20=20\log\left(\dfrac{4\pi fR_A}{c}\right)-20\log\left(\dfrac{4\pi fR_B}{c}\right)$

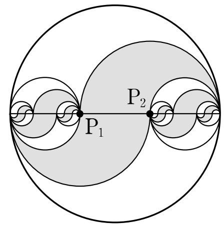
$=20\log\dfrac{R_A}{R_B}$

$\therefore \dfrac{R_A}{R_B}=10$

12. $\lim\limits_{n \to \infty} S_n=S$라 하면

R_1에 그려진 어두운 부분

의 넓이는



$2\left\{\dfrac{\pi \times 2^2}{2}-\dfrac{\pi \times 1^2}{2}\right\}=3\pi$

R_{n+1}은 R_n이 $\dfrac{1}{3}$로 축소되

어 두 번 들어오고 가운데 모양은 일정하므로

$S_{n+1}=\dfrac{2}{9}S_n+3\pi$

$\therefore S=\dfrac{2}{9}S+3\pi \quad \therefore S=\dfrac{27}{7}\pi$

13. 추가된 부품 중 S의 개수는 이항분포 $\mathrm{B}\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

추가된 부품 중 S의 개수가 0개일 확률:

${}_2\mathrm{C}_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

추가된 부품 중 S의 개수가 1개일 확률:

${}_2\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

추가된 부품 중 S의 개수가 2개일 확률:

${}_2\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

즉, S가 3개, T가 4개일 확률은 $\dfrac{1}{4}$

S가 4개, T가 3개일 확률은 $\dfrac{1}{2}$

S가 5개, T가 2개일 확률은 $\dfrac{1}{4}$

$\therefore$ 구하는 확률은 $\dfrac{\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{7}}{\dfrac{1}{4}\times\dfrac{4}{7}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{7}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{7}}$

$=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$

14. ㄱ. $f(x)=-x^2$인 경우

$f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖지만 $|f(x)|$는 극댓값을 갖지 않는다. $\therefore$ 거짓

ㄴ. $f(|x|)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$이므로

$x<0$에서 x가 증가할 때 $f(-x)$는 증가하고

$x>0$에서 x가 증가할 때 $f(x)$는 감소한다.

$\therefore f(|x|)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. $\therefore$ 참

ㄷ. $y=x^2|x|$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

$f(x)-x^2|x|$는

$x<0$에서 x가 증가할 때 증가하고

$x>0$에서 x가 증가할 때 감소한다.

$\therefore\ f(x)-x^2|x|$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$\therefore$ 참

15. $(1+x)^{2n-1}$에서 x^{n-1}의 계수는 $\boxed{{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}}$

$(1+x)^{n-1}(1+x)^n$의 x^{n-1}의 계수는

$$\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_k \times {}_n\mathrm{C}_{n-k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \times \boxed{{}_n\mathrm{C}_{n-k}}$$

$1 \leqq k \leqq n$일 때 $k \times {}_n\mathrm{C}_k = n \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n} k({}_n\mathrm{C}_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (n \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \times {}_n\mathrm{C}_k)$$

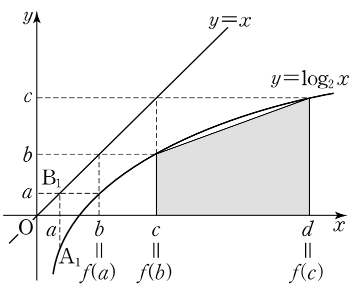
$$= n \sum_{k=1}^{n} ({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \times {}_n\mathrm{C}_{n-k})$$

$$= n \times {}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}$$

$$= n \times \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}$$

$$= \frac{n}{2} \times \frac{(2n)!}{n!n!} = \boxed{\frac{n}{2} \times {}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

16.



$y=\log x$와 $y=2^x$는 서로 역함수관계이므로

$b=f(a)$

$c=f(b)=f(f(a))$

$d=f(c)=f(f(b))$

사다리꼴의 넓이는 $(b+c)\times(d-c)\times\dfrac{1}{2}$

$$=\frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\}\times\{f(f(b))-f(b)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\}\times\{f(f(b))-f(f(a))\}$$

17. ㄱ. $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$이므로 $\therefore$ 거짓

ㄴ. $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m$ 중 $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$의 개수를 각각 $x,\ y,\ z,\ w$개라 하면

$$A_1+A_2+\cdots+A_m=\begin{pmatrix}y+z+w & x+z+w\\ x+y+w & x+y+z\end{pmatrix}$$

$y+z+w=9,\quad x+z+w=9,\quad x+y+w=9,$

$x+y+z=9$

네 식을 변변 더하면 $3(x+y+z+w)=36,$

$x+y+z+w=12$

$\therefore\ x=y=z=w=3$

따라서 $m=12$일 때 가능하다. $\therefore$ 참

ㄷ. $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 중 $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$의 개수를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$개라 하면

$$\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}+A_1+A_2+\cdots+A_n$$

$$=\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b+c+d & a+c+d\\ a+b+d & a+b+c\end{pmatrix}$$

여기서, $b+c+d,\ a+c+d,\ a+b+d,$

$a+b+c$가 모두 홀수여야 한다.

모두 합하면 $3(a+b+c+d)$가 짝수이므로

$a+b+c+d$도 짝수

따라서, $a,\ b,\ c,\ d$는 모두 홀수이다.

$\therefore\ a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1,\ d \geqq 1$이고

$a+b+c+d \geqq 4$

마지막으로, $a=b=c=d=1$일 때

$\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}+A_1+A_2+A_3+A_4=\begin{pmatrix}4&6\\8&10\end{pmatrix}$이므로 조건을 만족한다. $\therefore$ 참

18. $f'(x)=6x^2(x-1)^2+2(2x^3+1)(x-1)$

$\therefore\ f'(-1)=28$

19. $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5$에서

$\dfrac{1}{x}=t$라 하면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^3}f(t)-1}{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{f(t)-t^3}{t^3}}{\frac{t^2+1}{t^3}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{t^2+1}=5$$

$\therefore\ f(x)=x^3+5x^2+ax+b$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$에서

$f(1)=0$이므로 $f(1)=6+a+b=0$

$\therefore\ b=-a-6$

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^3+5x^2+ax-a-6}{x^2+x-2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+6x+6)+a(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$

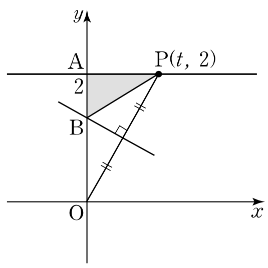
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+6x+a+6}{x+2}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ a=-12,\ b=6$

$\therefore\ f(x)=x^3+5x^2-12x+6$

$\therefore\ f(2)=10$

20.



$\overline{\mathrm{OP}}$의 중점은 $\left(\frac{t}{2},\ 1\right)$이고, 기울기는 $\frac{2}{t}$이다.

$\overline{\mathrm{OP}}$의 수직이등분선의 방정식은

$y=-\frac{t}{2}\left(x-\frac{t}{2}\right)+1=-\frac{t}{2}x+\frac{t^2}{4}+1$

$\therefore$ B의 좌표는 $\left(0,\ \frac{t^2}{4}+1\right)$

$\triangle$ABP의 넓이 $f(t)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\left(2-\frac{t^2}{4}-1\right)$

$=\frac{1}{8}t(4-t^2)$

$f'(t)=\frac{1}{8}(4-t^2)-\frac{2}{8}t^2=\frac{1}{8}(4-3t^2)$

$0<t<2$이므로 $t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$일 때 최댓값을 갖는다.

따라서, $f(t)$의 최댓값은

$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(4-\frac{4}{3}\right)$

$=\frac{2}{9}\sqrt{3}$

$\therefore\ a+b=11$

21. $\sqrt{4n+x}+\sqrt{4n-x}=2n$의 양변을 제곱하면

$8n+2\sqrt{16n^2-x^2}=4n^2,$

$\sqrt{16n^2-x^2}=2n^2-4n$ ……㉠

$\sqrt{16n^2-x^2}\geqq 0$이므로

$2n^2-4n\geqq 0,\ n\geqq 2$ ($\because$ n은 자연수) ……㉡

㉠을 다시 양변을 제곱하면

$16n^2-x^2=4n^4-16n^3+16n^2$

$\therefore\ x^2=-4n^4+16n^3$

$=-4n^3(n-4)$

$x^2\geqq 0$이므로 $-4n^3(n-4)\geqq 0$

$\therefore\ 0\leqq n\leqq 4$ ……㉢

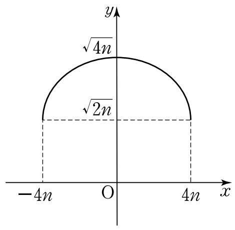
㉡, ㉢에서 $2\leqq n\leqq 4$

따라서, 모든 n의 값의 합은 $2+3+4=9$ 이다.

[다른 풀이] 주어진 무리 방정식을 변형하면

$\frac{\sqrt{4n+x}+\sqrt{4n-x}}{2}=n$

$\therefore\ y=\frac{\sqrt{4n+x}+\sqrt{4n-x}}{2}$와 $y=n$의 교점을 생각하면 된다.



$\therefore\ \sqrt{2n}\leqq n\leqq\sqrt{4n}$

$2n\leqq n^2\leqq 4n$

$\therefore\ 2\leqq n\leqq 4$

따라서, 모든 자연수 n의 값의 합은 9 이다.

22. $f(n)=\sum_{k=1}^{n}a_k$

$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{15}<0$

$\Leftrightarrow f(15)-f(m-1)<0$

$f(15)<f(m-1)$

그래프에서 $3<x<15$이면 $f(15)$보다 크므로

$3<m-1<15$

$4\leqq m-1\leqq 14$

$5\leqq m\leqq 15$

따라서, m의 최솟값은 5 이다.

23. $f(x)=x^2+ax+b$라 하자.

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (|x|>1)\\ -1 & (-1\leqq x<1)\\ 0 & (x=1)\end{cases}$$

$g(x)$는 $x=1$에서만 불연속이다.

$f(x)g(x)$가 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

이 성립하고 이로부터 $a+b=-1$ ……㉠

$$h(x)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ 1 & (x>0)\end{cases}$$

$h(x)$는 $x=0$에서만 불연속이다.

$f(x)h(x)$가 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)h(x)=f(0)g(0)$

$b=0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1,\ b=0$

$\therefore\ f(x)=x^2-x$

$f(10)=90$

24. $g(x)=f(x)-f(1)$라 하자.

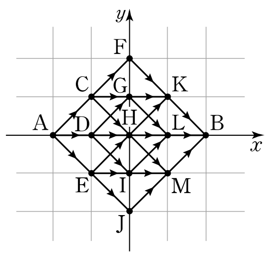
$g(1)=0$임은 자명하다.

한편, $y=|g(x)|$의 미분불가능한 지점은 $g(x)=0$

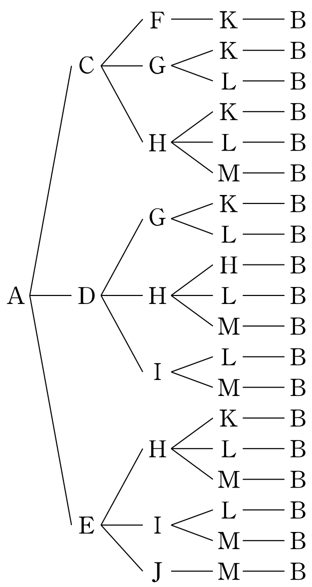
의 해이어야 한다.
$x=a(a>2)$에서만 $y=|g(x)|$이 미분가능하지 않으므로
$g'(1)=0$이고 $g'(a)\neq 0$
$g'(1)=g(1)=0$이므로 $g(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 가진다.
따라서, $g(x)=k(x-1)^2(x-a)(x-b)$이 된다.
한편, $b\neq 1$이고 $b\neq a$이면 $x=b$에서 $y=|g(x)|$가 미분불가능이다.
이로부터 $b=1$을 얻는다. ($\because\ g'(a)\neq 0$)
$g(x)=k(x-1)^3(x-a)$
$f'(x)=g'(x)=3k(x-1)^2(x-a)+k(x-1)^3$에서
$f'(2)=0$이므로 $a=\dfrac{7}{3}$

$\therefore \dfrac{f'(5)}{f'(3)}=12$

25. $(-2,\ 0)$에서 $(2,\ 0)$까지 가는 방법은



A에서 B를 네 번만에 가는 방법은
$\nearrow\ \nearrow\ \searrow\ \searrow$
$\nearrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \searrow$
$\rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow$
세 종류가 있고 각각의 경우를 계산해보면
$\dfrac{4!}{2!2!}+\dfrac{4!}{2!}+1=19$가지이다.
[다른 풀이]



[미분과 적분]

26. $\cos 50°+\cos 10°=2\cos\dfrac{60°}{2}\cos\dfrac{40°}{2}$

$\sin 50°+\sin 10°=2\sin\dfrac{60°}{2}\cos\dfrac{40°}{2}$이므로

$$\frac{\sin 50°+\sin 10°}{\cos 50°+\cos 10°}=\frac{\cancel{2}\sin 30°\cancel{\cos 20°}}{\cancel{2}\cos 30°\cancel{\cos 20°}}$$
$$=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

27. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\sin x}(1-e^{\sin x-\tan x})}{\tan x-\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(e^{1-\sin x}\times\frac{e^{\sin x-\tan x}-1}{\sin x-\tan x}\right)$$

($\sin x-\tan x=t$라고 하면,
$x\to 0$이면 $t\to 0$
$\displaystyle\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x-\tan x}-1}{\sin x-\tan x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}=1$)

$=e\times 1\ =e$

28. $\mathrm{A}(1,\ 0)$이라 하면
$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=2t$이므로 $\angle\mathrm{AOP}=2t$
$\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}=t$이므로 $\angle\mathrm{AOQ}=t$
$\therefore$ P에서 y축까지의 거리는 $|\cos 2t|$
Q에서 x축까지의 거리는 $|\sin t|$
따라서, 방정식 $|\cos 2t|=|\sin t|(0\leqq t\leqq\pi)$의 해를 구하는 것과 같다.
양변을 제곱하면 $\cos^2 2t=\sin^2 t$
2배각 공식에서, $(1-2\sin^2 t)^2=\sin^2 t$
$4\sin^4 t-5\sin^2 t+1=(\sin^2 t-1)(4\sin^2 t-1)=0$
$\therefore\ \sin t=\pm 1,\ \pm\dfrac{1}{2}$

$0\leqq t\leqq\pi$이므로, $t=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

따라서, 구하는 합은 $\dfrac{3}{2}\pi$ 이다.

29. ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x}\right)$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}\times\frac{x^2}{x}\right)$$
$=0\quad\therefore$ 참

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{f(x)}\times\frac{x}{e^x-1}\times\frac{3^x-1}{x}\right)$
$=1\times 1\times\ln 3$
$=\ln 3\quad\therefore$ 참

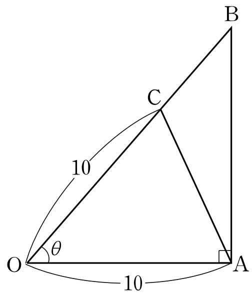
ㄷ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x}\right)$

한편, $f(x)=|x|$이면 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이지만

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$은 존재하지 않는다.

따라서, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}$은 존재하지 않는다.∴ 거짓

30. $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점을 M이라 하면



$\overline{\mathrm{AM}}=10\cdot\sin\frac{\theta}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=20\sin\frac{\theta}{2}$

$\overline{\mathrm{OB}}=\frac{10}{\cos\theta}$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=10\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$

$\therefore\ f(\theta)=20\sin\frac{\theta}{2}+10\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)+10\tan\theta$

$\lim_{\theta\to+0}\frac{f(\theta)}{\theta}$

$=10\lim_{\theta\to+0}\frac{2\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}+\tan\theta}{\theta}$

$=10\left\{\lim_{\theta\to+0}\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}+\lim_{\theta\to+0}\frac{(1-\cos\theta)}{\theta\cdot\cos\theta}+\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\theta}{\theta}\right\}$

$=10(1+0+1)$

$=20$

[확률과 통계]

26. 자료 A의 범위 : $29-21=8$

자료 B의 평균 : $\frac{34+35+38+36+m+n}{6}$

$=\frac{143+m+n}{6}=35$,

$m+n=67$

자료 B에서 $m<n$이고 m, n을 제외한 자료의 범위는 4이므로

m이 최소이거나 n이 최대인 경우로 나누어 생각할 수 있다.

i) m이 최소, 38이 최대인 경우

$38-m=8$

$m=30,\ n=37$

ii) m이 최소, n이 최대인 경우

$n-m=8$

$m=\frac{59}{2},\ n=\frac{75}{2}$ (조건에 모순)

iii) 34가 최소, n이 최대인 경우

$n-34=8,\ n=42,\ m=25$

(조건에 모순)

i), ii), iii)에서 $n=37$

27. 17을 포함하도록 선택하는 방법의 수는 ${}_{99}\mathrm{C}_2$

17을 포함하지 않도록 선택하는 방법의 수는 ${}_{99}\mathrm{C}_3$

$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{{}_{99}\mathrm{C}_3}{{}_{99}\mathrm{C}_2}=\frac{\frac{99\times98\times97}{3!}}{\frac{99\times98}{2!}}=\frac{97}{3}$

28. 환자가 완치될 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

4명의 환자 중 완치된 것으로 판단될 환자가 2명일 확률은

${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}=\frac{8}{27}$

29. ㄱ. A의 범위 : $70-15=55$

B의 범위 : $105-50=55$

∴ 두 자료의 범위는 같다 (참)

ㄴ. A에서 중앙값이 40이므로, 중앙값 이하인 자료는 50% 이상이다. (참)

ㄷ. A에서 평균 > 중앙값이므로, 평균 이상인 자료는 50% 이하이다.

B에서 평균 < 중앙값이므로, 평균 이상인 자료는 50% 이상이다. (참)

30. 현재 5인승에 4명, 7인승에 5명, 9인승에 6명이 타고 있으므로 A와 B가 같은 차에 배정되기 위해서는 7인승 또는 9인승에 배정되어야 한다.

(7인승에 배정될 확률)$=\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$

(9인승에 배정될 확률)$=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{15}$

∴ A와 B가 같은 차에 배정될 확률은 $\frac{4}{15}$

$\therefore\ 10p+q=10\times15+4=154$

[이산수학]

26. 점의 개수가 10개이므로 완전그래프가 되기 위한 변의 총 개수는 ${}_{10}\mathrm{C}_2=45$(개)이다.

주어진 그래프에 그려진 변의 개수가 15개이므로 추가해야 할 변의 개수는 $45-15=30$(개)이다.

27. 첫 문자는 a이고 a끼리 이웃하면 안 되므로 두 번째 문자는 b이다.

$ab\cdots\cdots$의 형태만 가능하므로 뒤의 네 자리만 생각해보자.

a는 이웃하면 안 되므로 a는 최대 2개까지만 사용

할 수 있다.

ⅰ) a가 2개 사용된 경우

$abab$, $abba$, $baba$의 3가지

ⅱ) a가 1개 사용된 경우

$abbb$, $babb$, $bbab$, $bbba$의 4가지

ⅲ) a가 0개 사용된 경우

$bbbb$의 1가지

따라서, 구하는 문자열의 개수는 $3+4+1=8$이다.

28. 꼭짓점 a에서 각 꼭짓점으로 가는 변의 수가 2인 경로의 수를 세면 아래와 같다.

$a(2)$, $b(0)$, $c(2)$, $d(2)$, $e(0)$

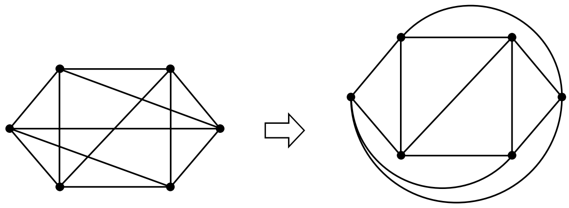
각 꼭짓점에서 출발하여 꼭짓점 d로 가는 변의 수가 2인 경로의 수를 세면 아래와 같다.

$a(2)$, $b(a)$, $c(2)$, $d(3)$, $e(1)$

꼭짓점 a에서 꼭짓점 d로 가는 변의 수가 4인 경로는 변의 수가 2가 되도록 하는 각 꼭짓점으로 가는 경로의 수와 그 꼭짓점에서 d로 가는 변의 수가 2인 경로의 수를 곱하여 더한 것과 같으므로 구하는 경로의 수는

$2\times2+0\times1+2\times2+2\times3+0\times1=14$(가지)

29. ㄱ. (참)

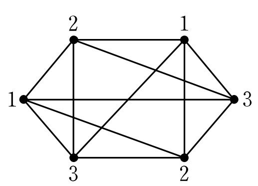


ㄴ. (참)

모든 꼭짓점의 차수가 짝수이므로 오일러 회로를 갖는다.

ㄷ. (거짓)

아래 그림과 같이 칠하면 3가지 색만으로도 칠할 수 있다.



30. 빨간색, 파란색, 노란색 색연필의 개수를 각각 a, b, c라 하면 각 색의 색연필을 적어도 하나씩 포함해야 하므로

$a\geqq1,\ b\geqq1,\ c\geqq1$

이고, 15개 이하의 색연필을 선택해야 하므로

$a+b+c\leqq15$

$a'=a-1,\ b'=b-1,\ c'=c-1$이라 하면

$a'\geqq0,\ b'\geqq0,\ c'\geqq0,\ a'+b'+c'\leqq12$

를 만족해야 한다.

$a'+b'+c'=n$을 만족하는 방법의 수가 ${}_3\mathrm{H}_n$이므로 구하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_0+{}_3\mathrm{H}_1+{}_3\mathrm{H}_2+\cdots+{}_3\mathrm{H}_{12}$

$={}_2\mathrm{C}_0+{}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{14}\mathrm{C}_{12}$

$={}_{15}\mathrm{C}_{12}=455$

• 수리 '나' 형 •

정 | 답 |

1. ④	2. ⑤	3. ①	4. ②	5. ③
6. ④	7. ①	8. ①	9. ②	10. ③
11. ④	12. ②	13. ③	14. ⑤	15. ③
16. ①	17. ④	18. 65	19. 15	20. 21
21. 16	22. 5	23. 25	24. 10	25. 19
26. ②	27. ⑤	28. ③	29. ②	30. 4

출 | 제 | 문 | 항 | 분 | 석 |

문항	난이도	출제 단원	출제 의도
1	하	지수 · 로그	지수 · 로그계산
2	하	행렬	행렬의 연산과 성분합
3	하	수열의 극한	$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴계산
4	하	지수 · 로그	식의 변형
5	중	수열의 극한	샌드위치정리
6	중	행렬	역행렬계산
7	중	수열의 극한	이항분리
8	중	수열	홀 · 짝이용한 주기
9	상	지수 · 로그함수	그래프해석
10	상	지수 · 로그	가수범위
11	중	지수 · 로그함수	실생활응용하기
12	중	수열의 극한	닮음이용 무한급수
13	중	여러 가지 수열	홀 · 짝 이용한 규칙성
14	중	행렬	성분 이용한 행렬의 성질확인
15	상	경우의 수	이항정리이용 연역적 추론
16	상	지수 · 로그함수	그래프 수식 표현
17	상	행렬	행렬의 성분과 짝홀
18	하	지수방정식	식의 치환
19	중	등차수열	연립방정식
20	하	역행렬과 연립방정식	기울기, 절편비교
21	하	로그부등식	밑조건
22	중	수열	Σ정의와 함수의 그래프 해석
23	하	이항정리	3^n의 나머지의 주기성
24	상	상용로그	정수조건
25	상	경우의 수	이동경로의 개수 구하기
26	하	등비수열	등비수열 합계산
27	중	점화식과 수열	합성함수 함수
28	중	수열의 극한	수렴하는 꼴로의 변형
29	상	경우의 수	수형도
30	상	순서도	순서도 나열

풀 | 이 |

1. (주어진 식)$=2^2\times(2^3)^{\frac{2}{3}}$
$=4\times 2^2=16$

2. $A=(A-2B)+2B$

$$=\begin{pmatrix}-7 & -2\\ 6 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -2\\ -6 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

따라서, A의 모든 성분의 합은 -5 이다.

3. 분모, 분자를 n으로 나누면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}-1}=\frac{2}{\sqrt{9}-1}=1$$

4. $\dfrac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$에서 좌변의 분모, 분자에 2^a을 곱하면

$$\frac{4^a+1}{4^a-1}=-2 \quad \therefore\ 4^a=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ 4^a+4^{-a}=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$$

5. (가)−(나)에서

$$\left(20-\frac{1}{n}\right)-\left(10+\frac{1}{n}\right)<2b_n<\left(20+\frac{1}{n}\right)-\left(10-\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore\ 5-\frac{1}{n}<b_n<5+\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)=5$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n=5$$

6. $A^{-1}B^{-1}=(BA)^{-1}$이므로

$A^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에서 각각의 역행렬을 구하면

$$BA=\begin{pmatrix}-1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1 & -b\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ a & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ a-1 & 2a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ a=1,\ b=1 \qquad \therefore\ a+b=2$$

7. $a_n=\log\dfrac{n+1}{n}$에서

$a_1+a_2+\cdots+a_n$

$$=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\cdots+\log\frac{n+1}{n}$$

$$=\log\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}$$

$$=\log(n+1)$$

$\therefore\ 10^{a_1+a_2+\cdots+a_n} = 10^{\log(n+1)} = n+1$

$\therefore$ (주어진 식)$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$

8. 자연수 k에 대하여

$n=4k$일 때 $a_n = (-1)^{\frac{4k(4k+1)}{2}} = 1$

$n=4k-1$일 때 $a_n = (-1)^{\frac{(4k-1)\cdot 4k}{2}} = 1$

$n=4k-2$일 때 $a_n = (-1)^{\frac{(4k-2)(4k-1)}{2}} = -1$

$n=4k-3$일 때 $a_n = (-1)^{\frac{(4k-3)(4k-2)}{2}} = -1$

$na_n = b_n$이라 하면

$b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k}$

$=-(4k-3)-(4k-2)+(4k-1)+4k=4$

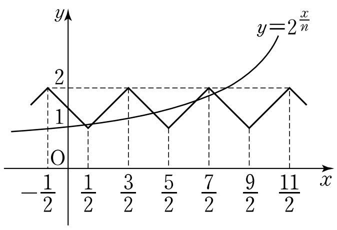
이고 $2010 = 4\times 502+2$이므로

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{2010} na_n = \sum\limits_{n=1}^{2010} b_n = 4\times 502 + b_{2009}+b_{2010}$

$= 2008-2009-2010$

$= -2011$

9. $y=f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



$y=2^{\frac{x}{n}}$는 점 (0, 1)을 지나고 $x<0$일 때 $2^{\frac{x}{n}}<1$ 이므로 $x>0$에서 5개의 교점을 가져야 한다.

위의 그림에서 $2^{\frac{x}{n}}=2$의 해 $x=n$이 $\dfrac{7}{2}<x<\dfrac{11}{2}$ 이어야 한다.

$\therefore\ \dfrac{7}{2}<n<\dfrac{11}{2}$

n이 자연수이므로 $n=4$ 또는 $n=5$ $\therefore$ 합은 9

10. $\log a = m+\alpha\,(m=0,\ 1$이고, $0\leqq\alpha<1)$

$\log b = n+\beta\,(n=0,\ 1$이고, $0\leqq\beta<1)$

$\alpha+\beta=1$이므로 $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$이고,

$\log a+\log b=\log ab$는 정수이다.

$1\leqq a<100,\ 1\leqq b<100$이므로

$1\leqq ab<10000$ $\therefore\ ab=1,\ 10,\ 100,\ 1000$

한편 $\alpha,\ \beta\neq 0$이므로 $a,\ b\neq 1,\ 10$이고,

$a<b$이므로

$\therefore\ (a, b)$는 $(2, 5),\ (2, 50),\ (4, 25),\ (5, 20),\ (20, 50),\ (25, 40)$ $\therefore$ 6개

11. $S=P-20\log\left(\dfrac{4\pi fR}{c}\right)$에서

$S=-25$일 때 $-25=P-20\log\left(\dfrac{4\pi fR_A}{c}\right)\cdots\cdots$ ㉠

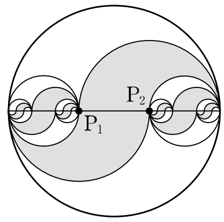
$S=-5$일 때 $-5=P-20\log\left(\dfrac{4\pi fR_B}{c}\right)\cdots\cdots$ ㉡

㉡-㉠에서 $20=20\log\left(\dfrac{4\pi fR_A}{c}\right)-20\log\left(\dfrac{4\pi fR_B}{c}\right)$

$=20\log\dfrac{R_A}{R_B}$

$\therefore\ \dfrac{R_A}{R_B}=10$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$라 하면



R_1에 그려진 어두운 부분의 넓이는

$2\left\{\dfrac{\pi\times 2^2}{2}-\dfrac{\pi\times 1^2}{2}\right\}=3\pi$

R_{n+1}은 R_n이 $\dfrac{1}{3}$로 축소되어 두 번 들어오고 가운데 모양은 일정하므로 $S_{n+1}=\dfrac{2}{9}S_n+3\pi$

$\therefore\ S=\dfrac{2}{9}S+3\pi$

$\therefore\ S=\dfrac{27}{7}\pi$

13. $a_na_{n+1}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$에서

$a_{2n}a_{2n+1}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2n},\ a_{2n+1}a_{2n+2}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2n+1}$

$\therefore\ \dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n}}=\dfrac{1}{5}$ $\therefore\ a_{2(n+1)}=\dfrac{1}{5}a_{2n}$

$a_1=1$이고 $a_1a_2=\dfrac{1}{5}$이므로 $a_2=\dfrac{1}{5}$

$\therefore\ a_{2n}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\dfrac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{4}$

14. $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$라 하면

$PAP=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} d & c\\ b & a\end{pmatrix}$

$PAP=A$이면 $a=d,\ b=c$

$\therefore\ S=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}\middle|\, a,\ b$는 실수$\right\}$

ㄱ. $P \in S$ $\quad \therefore$ 참

ㄴ. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$라 하면

$AB=\begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix} \in S \quad \therefore$ 참

ㄷ. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$일 때 $A^2=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}=0$

이면 $a^2+b^2=0$에서 $a=b=0$

$\therefore A=O \quad \therefore$ 참

15. $(1+x)^{2n-1}$에서 x^{n-1}의 계수는 $\boxed{{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}}$

$(1+x)^{n-1}(1+x)^n$의 x^{n-1}의 계수는

$$\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_k \times {}_n\mathrm{C}_{n-k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \times \boxed{{}_n\mathrm{C}_{n-k}}$$

$1 \leqq k \leqq n$일 때 $k \times {}_n\mathrm{C}_k = n \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n} k({}_n\mathrm{C}_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (n \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \times {}_n\mathrm{C}_k)$$

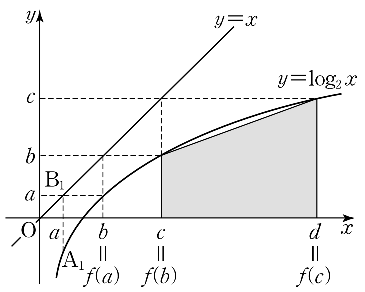
$$= n\sum_{k=1}^{n} ({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \times {}_n\mathrm{C}_{n-k})$$

$$= n \times {}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}$$

$$= n \times \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}$$

$$= \frac{n}{2} \times \frac{(2n)!}{n!n!} = \boxed{\frac{n}{2} \times {}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

16.



$y=\log x$와 $y=2^x$는 서로 역함수관계이므로

$b=f(a)$

$c=f(b)=f(f(a))$

$d=f(c)=f(f(b))$

사다리꼴의 넓이는 $(b+c)\times(d-c)\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\}\times\{f(f(b))-f(b)\}$

$=\frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\}\times\{f(f(b))-f(f(a))\}$

17. ㄱ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이므로 $\quad \therefore$ 거짓

ㄴ. $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m$ 중 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$의 개수를 각각 $x,\ y,\ z,\ w$개라 하면

$A_1+A_2+\cdots+A_m=\begin{pmatrix} y+z+w & x+z+w \\ x+y+w & x+y+z \end{pmatrix}$

$y+z+w=9,\quad x+z+w=9,\quad x+y+w=9,$

$x+y+z=9$

네 식을 변변 더하면 $3(x+y+z+w)=36,$

$x+y+z+w=12$

$\therefore x=y=z=w=3$

따라서 $m=12$일 때 가능하다. $\quad \therefore$ 참

ㄷ. $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 중 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$의 개수를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$개라 하면

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}+A_1+A_2+\cdots+A_n$

$=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b+c+d & a+c+d \\ a+b+d & a+b+c \end{pmatrix}$

여기서, $b+c+d,\quad a+c+d,\quad a+b+d,$ $a+b+c$가 모두 홀수여야 한다.

모두 합하면 $3(a+b+c+d)$가 짝수이므로 $a+b+c+d$도 짝수

따라서, $a,\ b,\ c,\ d$는 모두 홀수이다.

$\therefore a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1,\ d \geqq 1$이고

$a+b+c+d \geqq 4$

마지막으로, $a=b=c=d=1$일 때

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}+A_1+A_2+A_3+A_4=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$이므로 조건을 만족한다. $\quad \therefore$ 참

18. $9^x-3^{x+2}+8=0$에서

$3^x=t$라 하면

$t^2-9t+8=0$의 두 근은 $3^\alpha,\ 3^\beta$이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$(3^\alpha)^2+(3^\beta)^2=(3^\alpha+3^\beta)^2-2\cdot 3^\alpha 3^\beta$

$=9^2-2\cdot 8=65$

19. $1,\ x,\ y,\ z$가 등차수열을 이루므로 공차는 $x-1$이다.

$\therefore y=x+x-1=2x-1,$

$z=x+2(x-1)=3x-2$이므로

$6x+z=5y$

$6x+3x-2=10x-5$

$x=3,\quad y=5,\quad z=7$

$\therefore x+y+z=15$

20. $\begin{pmatrix} 1 & a-2 \\ 2a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ b \end{pmatrix}$이 해를 무수히 많이 가지려면

$$\frac{1}{2a}=\frac{a-2}{-2}=\frac{10}{b}$$

$2a(a-2)=-2$

$a^2-2a+1=0 \quad \therefore\ a=1,\ b=20$

$\therefore\ a+b=21$

21. 진수조건에서 $x\neq 0,\ 5x-8>0,\ x>\frac{8}{5}$ ……㉠

$1+\log_{\frac{1}{2}}x^2>\log_{\frac{1}{2}}(5x-8)$

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}x^2>\log_{\frac{1}{2}}(5x-8)$

$\frac{1}{2}x^2<(5x-8)$

$x^2-10x+16<0$

$2<x<8$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha=2,\ \beta=8,\quad \therefore\ \alpha\beta=16$

22. $f(n)=\sum_{k=1}^{n}a_k$

$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{15}<0$

$\Leftrightarrow f(15)-f(m-1)<0$

$f(15)<f(m-1)$

그래프에서 $3<x<15$이면 $f(15)$보다 크므로

$3<m-1<15$

$4\leqq m-1\leqq 14$

$5\leqq m\leqq 15$

따라서, m의 최솟값은 5 이다.

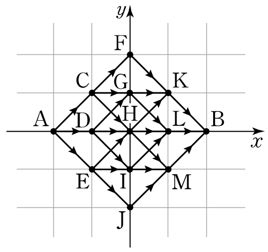
23. $\sum_{k=1}^{n}{}_{n}\mathrm{C}_k=2^n-1$ ……㉠

2^n은 n이 홀수일 때는 3으로 나누면 나머지가 2이고 n이 짝수일 때는 3으로 나누면 나머지가 1이므로 ㉠이 3의 배수가 되려면 n이 짝수이면 된다.
따라서, 구하는 n의 개수는 25

24. n이 자연수이므로 $f(n)$은 음 아닌 정수이다.
또 $0\leqq g(n)<1$이므로 $f(n)-g(n)$은 $f(n)=0$일 때 최솟값을 갖는다.
n이 한 자리 자연수일 때 $g(n)$이 최대일 때는 $g(9)$이므로 $f(n)-g(n)$의 최솟값은 $0-\log 9=\log\frac{1}{9}$

$\therefore\ a=9,\ b=1 \qquad \therefore\ a+b=10$

25. $(-2,\ 0)$에서 $(2,\ 0)$까지 가는 방법은



A에서 B를 네 번만에 가는 방법은

↗ ↗ ↘ ↘

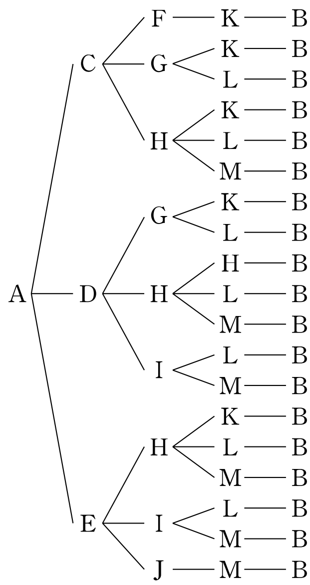
↗ → → ↘

→ → → →

세 종류가 있고 각각의 경우를 계산해보면

$\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{2!}+1=19$가지이다.

[다른 풀이]



26. 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하면

$a_2=a_1r=6$

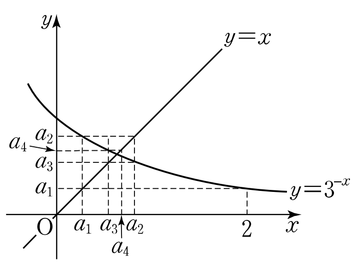
$a_5=a_1r^4=162$

$\therefore\ r^3=27 \quad \therefore\ r=3,\ a_1=2$

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2(3^n-1)}{3-1}=3^n-1\geqq 1000$

$\therefore\ n=7$

27.



$\therefore\ a_2>a_4>a_3$

28. $\dfrac{5^n a_n}{3^n+1} = b_n$이라 하면

$$a_n = \frac{3^n+1}{5^n} b_n$$

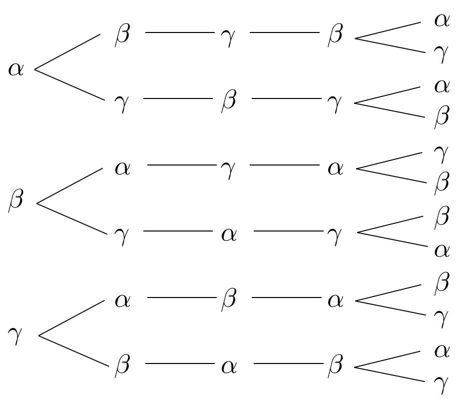
$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^n+1}{5^n} b_n}{\dfrac{3^{n+1}+1}{5^{n+1}} b_{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}(3^n+1)b_n}{5^n(3^{n+1}+1)b_{n+1}} = \frac{5}{3}$$

$(\because \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \alpha(\neq 0))$

29. A, B, C, D, E의 영역을 칠하는데 필요한 물감의 양이 각각 1, 3, 5, 7, 9통이므로
E D C B A 순서로 수형도를 그릴 때 3가지 색을 각각 α, β, γ라 하면

E D C B A



이므로 12가지

[다른 풀이]

영역 A, B, C, D, E 의 넓이의 비는
1 : 3, 5 : 7 : 9이다. 각 물감을 10통을 사용할 수 있고, A, B, C, D, E를 칠하는데 사용되는 물감의 양은 각각 1, 3, 5, 7, 9통이다.
따라서, E에 칠한 색은 A에만 다시 칠할 수 있고, C와 D에 칠한 색은 각각 A와 B에 다시 칠할 수 있다. 각 영역을 구분해서 칠해야 하므로 E, D, C, B, A 순서로 칠할 때 B에 칠할 수 있는 색은 D에 칠한색 한 가지 밖에 없고, A에 칠할 수 있는 색은 E와 C에 칠한 색을 다시 칠할 수 있다.
따라서, E, D, C, B, A에 칠하는 방법의 수는
$3\times2\times1\times1\times2 = 12$(가지)

30. 따라가면서 계산하여 보면

A	29	14	7	3	1	0
r	0	1	0	1	1	1
S	0	1	1	2	3	4

따라서, 인쇄되는 S의 값은 4이다.